STANDARD *NSSDA* APLICADO AL VUELO DE MONTEVIDEO EFECTUADO EN NOVIEMBRE DE 2024

Objetivo:

Aplicar el estándar NSSDA a los productos entregados por parte del consorcio GEOIMAGEN-TOPOCART.

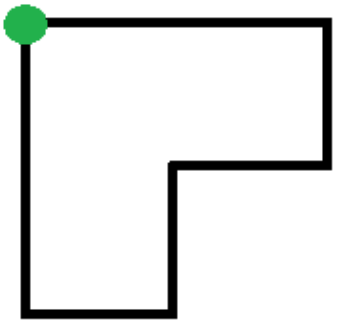
Procedimiento:

Como primer paso, se llevó a cabo la determinación de la ubicación de una muestra de puntos homogénea que cubra por completo el departamento. Según el estándar NSSDA (*National Standard for Spatial Data Accuracy*), se requieren veinte o más puntos para realizar una evaluación estadística significativa de la calidad posicional, más allá del tamaño total de la muestra o de la superficie de que se trate. Con veinte puntos se asocia un cálculo de calidad con un nivel de confianza del 95%. En el entorno de esas ubicaciones, se determinó sectores donde se pudiesen realizar marcas pre-vuelo, que asegurasen su permanencia durante el vuelo y durante el tiempo que fuese a demandar la medición de ellos.

Posteriormente se visitaron estos sectores, decidiendo in situ cuál sería el mejor lugar para pintar los puntos de control, evitando proximidad a fuertes desniveles, sitios muy transitados en los que se pueda estropear la marca, sitios en los que sombras densas pudiesen afectar la fotointerpretación, etc. Las marcas sembradas tuvieron “forma de L” de 0.40mx0.40m y 0.20m de ancho, de acuerdo a estándares.



Se midió el vértice indicado en verde:



Sobre estos puntos se realizaron mediciones con un equipo GNSS, método diferencial estático, vinculado a las estaciones permanentes UYMO y UYGM, ubicadas en el Cerro de Montevideo y en el Instituto Geográfico Militar respectivamente. Los tiempos de medición respondieron al siguiente cuadro, salvo en casos en los que por algún motivo no se pudo resolver los vectores y se remidió con mayor tiempo de ocupación.

Tabla 5. Referencia de tiempos de ocupación frente a visibilidad, longitud de línea base y mono – bifrecuencia para la componente horizontal

	Recomendaciones de tiempos mínimos de observación (minutos) Satélites en el horizonte – Receptor Mono - Bifrecuencia					
Longitud línea base	4		5		6 o mas satélites	
(km)	Mono	Bi	Mono	Bi	Mono	Bi
1 – 10 Km	60 min	20 min	36 min	12 min	24 min	8 min
10 – 20 Km	75 min	25 min	45 min	15 min	30 min	10 min
20 – 50 Km[1]	105 min	35 min	75 min	25 min	60 min	20 min
> 50 Km[1]	180 min	60 min	135 min	45 min	90 min	30 min

[1]Se recomienda emplear equipos de doble frecuencia para líneas base superiores a 20 Km

Fuente: US Army Corps of Engineers

Todos los puntos relevados fueron fotografiados en el momento de la medición.

Una vez en gabinete, se procesaron dos vectores por punto fotoidentificable ocupado, y posteriormente se ajustaron para calcular una coordenada más robusta de cada punto.

Se calcularon coordenadas planas UTM Zona 21 Sur, marco de referencia SIRGAS-ROU98, con cota ortométrica modelada EGM08 a partir de la altura elipsoidal de cada punto.

Como paso siguiente, se generó una planilla de coordenadas “vuelo” a partir del ortomosaico y la nube de puntos entregada. Para la componente altimétrica, se utilizó el software Global Mapper, específicamente la herramienta LiDAR QC, con el objetivo de obtener la cota de cada punto de control a partir de la nube de puntos LiDAR entregada. Para ello, se cargó la nube de puntos junto con el archivo de puntos de control fotoidentificables y se extrajo, para cada ubicación, la altura correspondiente calculada a partir de los puntos LiDAR existentes en su entorno inmediato.

Esta herramienta permitió generar una planilla con las coordenadas obtenidas desde los productos del vuelo, incorporando la componente H derivada de la nube LiDAR. Dichos valores fueron luego comparados con las cotas ortométricas determinadas mediante medición GNSS, permitiendo calcular las diferencias altimétricas ΔH utilizadas en la evaluación estadística y en la aplicación del estándar NSSDA.

Una vez conformado el listado de coordenadas de los puntos medidos y el listado de coordenadas de los puntos obtenidos de los productos, se procedió a calcular las diferencias en E, N y H.

Como es recomendado, previo a aplicar el estándar de la NSSDA se efectuaron procesos estadísticos. En primer lugar se identificaron valores atípicos (*outliers*) mediante el método de Chauvenet. Se aplicó el método a tres muestras diferentes, diferencia en E (ΔE o ΔX), diferencia en N (ΔN o ΔY) y diferencia en H (ΔH). De existir valor atípico ya sea en ΔE o ΔN, se elimina el punto en planimetría, pero no en ΔH. De igual manera pero en sentido opuesto, de existir valor atípico en ΔH, se elimina ese valor para esa muestra, pero no para la muestra ΔE y ΔN.

El método consiste en primer lugar, en el cálculo del promedio ***p*** y la desviación estándar ***s*** de los valores de la muestra:

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - p)^2}{n-1}}$$

donde x_i son cada uno de los datos y ***n*** la cantidad de datos.

Luego se calcula la diferencia de cada dato con el promedio y se lo compara con la desviación estándar mediante la siguiente fórmula:

$$\tau = \frac{|x_i - p|}{s}$$

Finalmente, cada valor τ calculado se compara con el valor crítico dado por la tabla de valores de Chauvenet.

n	critical values	n	critical values
3	1,383	24	2,311
4	1,534	25	2,326
5	1,645	26	2,341
6	1,732	27	2,355
7	1,803	28	2,369
8	1,863	29	2,382
9	1,915	30	2,394
10	1,960	31	2,406
11	2,000	32	2,418
12	2,037	33	2,429
13	2,070	34	2,440
14	2,100	35	2,450
15	2,128	36	2,460
16	2,154	37	2,470
17	2,178	38	2,479
18	2,200	39	2,489
19	2,222	40	2,498
20	2,241	50	2,576
21	2,260	100	2,807
22	2,278	500	3,291
23	2,295	1000	3,481

- Tabla de valores críticos de Chauvenet. -

La muestra inicial constaba de 43 ternas de coordenadas. Por lo que se depuró la serie eliminando los datos cuyo valor τ superó a 2,5214. Posteriormente se volvió a realizar el procedimiento completo con la nueva serie de datos, calculando un nuevo $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s}$ y y τ comparando estos con un nuevo valor crítico. Así hasta que no se detectaron más valores atípicos.

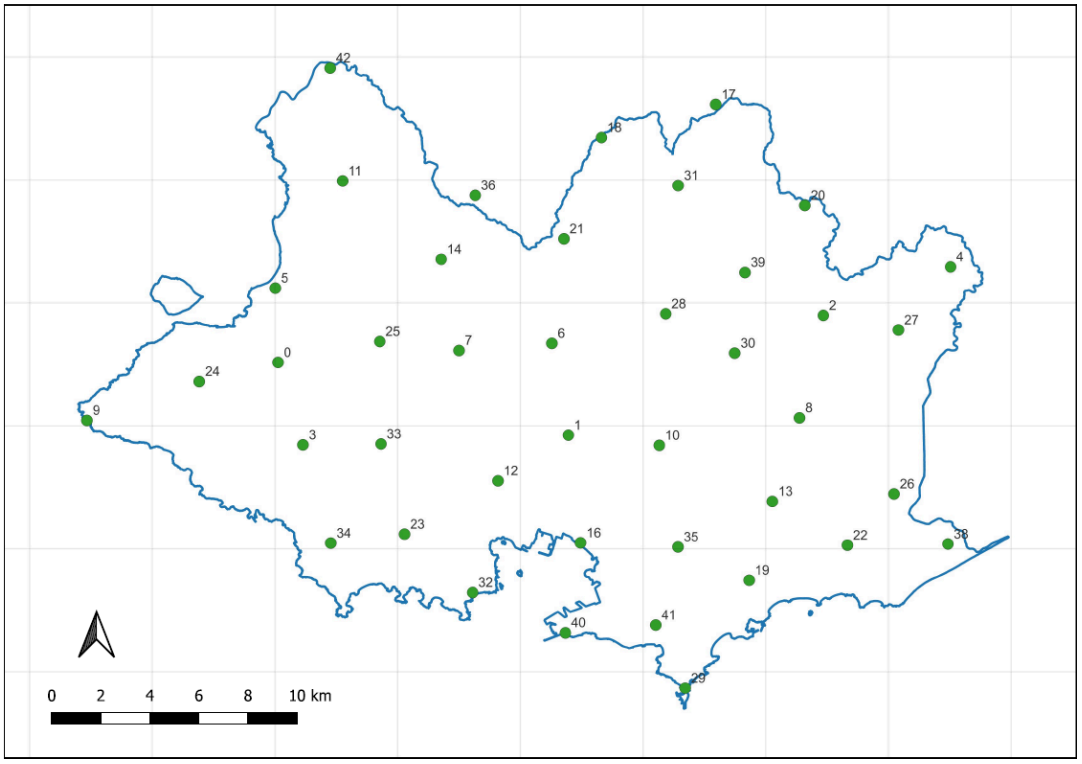
Para depurar las series, alcanzó con aplicar el procedimiento de Chauvenet una vez, eliminando un valor atípico en cada una.

En la siguiente tabla se muestran los valores de ΔE y ΔN iniciales. Resaltados en naranja se identifican los valores atípicos.

N° punto	ΔE	ΔN	ΔH Lidar
0	0,03610	0,0047	-0,0093
1	-0,05190	0,0415	-0,0356
2	-0,00410	-0,0158	-0,1262
3	-0,07990	0,0562	-0,0445
4	-0,04440	0,0411	-0,1126
5	-0,03320	0,0495	0,0049
6	-0,03930	0,0215	-0,0417
7	0,00980	-0,0025	-0,0749
8	-0,05270	-0,0190	-0,0326
9	0,11210	0,0938	-0,0622
10	-0,02180	0,0344	-0,0216
11	0,03790	0,0959	0,0104
12	-0,00070	0,0728	-0,0308
13	0,00650	0,0478	-0,1033
14	-0,02440	0,0316	-0,0438
15	-0,01000	0,1852	-0,0158
16	0,03910	0,0147	0,0099
17	0,00660	0,1437	-0,0277
18	-0,01040	0,1374	-0,0028
19	-0,02430	-0,0365	-0,0340
20	0,08530	0,0650	-0,0296
21	-0,02070	0,0275	-0,0866
22	0,03510	0,0295	0,0325
23	0,02570	-0,0268	0,0294
24	0,02030	0,0140	0,0184
25	-0,04100	0,0377	-0,0039
26	-0,01710	0,0190	-0,1552
27	-0,02070	0,0230	-0,0763
28	-0,03140	0,0360	-0,0425
29	0,05650	-0,0718	0,0276
30	0,03030	-0,0431	-0,0663
31	-0,02500	0,0516	-0,0826
32	0,06800	-0,0508	-0,0045
33	-0,04210	0,1429	-0,0487
34	0,05080	0,0321	0,0222
35	0,01800	-0,0134	0,0321
36	-0,03570	0,0658	-0,0422
37	-0,17530	0,0774	-0,0095
38	0,04280	0,0757	-0,0417
39	-0,06260	-0,0258	-0,1057
40	0,11390	-0,0985	-0,0634
41	-0,07230	-0,0073	-0,0736
42	-0,03040	0,0849	0,0378

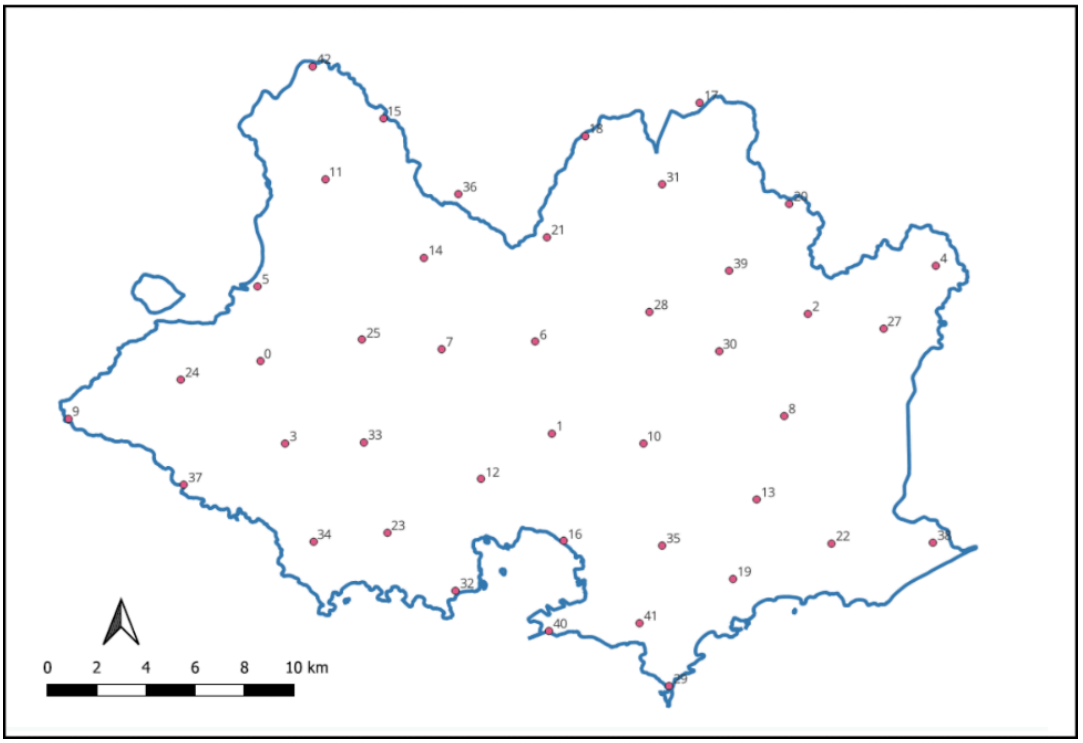
- Muestra de datos identificando los valores atípicos en naranja.-

De esta manera, se cuenta con una muestra de 41 puntos para la validación del ortomosaico.



- Ubicación de la muestra con valores ΔE y ΔN. -

Y una muestra de 42 puntos para la validación de la componente altura.



- Ubicación de la muestra con valores ΔH. -

El paso siguiente es realizar la prueba de contraste de bondad de ajuste a una distribución normal. Como los tamaños muestrales son menores o iguales a 50, se aplica la prueba de Shapiro-Wilk. Para muestras mayores a 50, se utiliza la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

El método consiste en plantearse una hipótesis H_0 que implica que la muestra proviene de una distribución normal. Luego se aplica un algoritmo que sirve para aceptar la H_0 o rechazarla. El algoritmo es el siguiente (ejemplo de la muestra de ΔE o ΔX):

- Se lista la serie de datos ordenados de menor a mayor y se calcula el promedio de ellos.

  ΔX_i : [-0.0799, -0.0723, -0.0626, … , 0.0853, 0.1121, 0.1139]

  $$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + ... + \Delta X_n}{n}$$

  Donde ***n*** es el tamaño de la muestra.

- Se calcula la diferencia de cada uno de estos datos con el promedio y se eleva al cuadrado. Todos estos ***n*** resultados se suman.

  $$z = \sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i - p)^2$$

- Se consulta la Tabla de coeficientes a_{in} para el contraste de Shapiro-Wilk ingresando por el tamaño de la muestra, en este caso 41:

Coeficientes a_{in} para el contraste de Shapiro-Wilks

n \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.7071										
3	0.7071	0.0000									
4	0.6872	0.1677									
5	0.6646	0.2413	0.0000								
6	0.6431	0.2806	0.0875								
7	0.6233	0.3031	0.1401	0.0000							
8	0.6052	0.3164	0.1743	0.0561							
9	0.5888	0.3244	0.1976	0.0947	0.0000						
10	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399						
11	0.5601	0.3315	0.2260	0.1429	0.0695	0.0000					
12	0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303					
13	0.5359	0.3325	0.2412	0.1707	0.1099	0.0539	0.0000				
14	0.5251	0.3318	0.2495	0.1802	0.1240	0.0727	0.0240				
15	0.5150	0.3306	0.2495	0.1878	0.1353	0.0880	0.0433	0.0000			
16	0.5056	0.3290	0.2521	0.1988	0.1447	0.1005	0.0593	0.0196			
17	0.4968	0.3273	0.2540	0.1988	0.1524	0.1109	0.0725	0.0359	0.0000		
18	0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163		
19	0.4808	0.3232	0.2561	0.2059	0.1641	0.1271	0.0932	0.0612	0.0303	0.0000	
20	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.0140	
21	0.4643	0.3185	0.2578	0.2119	0.1736	0.1339	0.1092	0.0804	0.0530	0.0263	0.0000
22	0.4590	0.3156	0.2571	0.2131	0.1764	0.1443	0.1150	0.0878	0.0618	0.0368	0.0122
23	0.4542	0.3126	0.2563	0.2139	0.1787	0.1480	0.1201	0.0941	0.0696	0.0459	0.0228
24	0.4493	0.3098	0.2554	0.2145	0.1807	0.1512	0.1245	0.0997	0.0764	0.0539	0.0321
25	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610	0.0403
26	0.4407	0.3043	0.2533	0.2151	0.1836	0.1563	0.1316	0.1089	0.0876	0.0672	0.0476
27	0.4366	0.3018	0.2522	0.2152	0.1848	0.1584	0.1346	0.1128	0.0923	0.0728	0.0540
28	0.4328	0.2992	0.2510	0.2151	0.1857	0.1601	0.1372	0.1162	0.0965	0.0778	0.0598
29	0.4291	0.2968	0.2499	0.2150	0.1864	0.1616	0.1395	0.1192	0.1002	0.0822	0.0650
30	0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862	0.0697
31	0.4220	0.2921	0.2475	0.2145	0.1874	0.1641	0.1433	0.1243	0.1066	0.0899	0.0739
32	0.4188	0.2898	0.2463	0.2141	0.1878	0.1651	0.1449	0.1265	0.1093	0.0931	0.0777
33	0.4156	0.2876	0.2451	0.2137	0.1880	0.1660	0.1463	0.1284	0.1118	0.0961	0.0812
34	0.4127	0.2854	0.2439	0.2132	0.1882	0.1667	0.1475	0.1301	0.1140	0.0988	0.0844
35	0.4096	0.2834	0.2427	0.2127	0.1883	0.1673	0.1487	0.1317	0.1160	0.1013	0.0873
36	0.4068	0.2813	0.2415	0.2121	0.1883	0.1678	0.1496	0.1331	0.1179	0.1036	0.0900
37	0.4040	0.2794	0.2403	0.2116	0.1883	0.1683	0.1505	0.1344	0.1196	0.1056	0.0924
38	0.4015	0.2774	0.2391	0.2110	0.1881	0.1686	0.1513	0.1356	0.1211	0.1075	0.0947
39	0.3989	0.2755	0.2380	0.2104	0.1880	0.1689	0.1520	0.1366	0.1225	0.1092	0.0967
40	0.3964	0.2737	0.2368	0.2098	0.1878	0.1691	0.1526	0.1376	0.1237	0.1108	0.0986
41	0.3940	0.2719	0.2357	0.2091	0.1876	0.1693	0.1531	0.1384	0.1249	0.1123	0.1004
42	0.3917	0.2701	0.2345	0.2085	0.1874	0.1694	0.1535	0.1392	0.1259	0.1136	0.1020
43	0.3894	0.2684	0.2334	0.2078	0.1871	0.1695	0.1539	0.1398	0.1269	0.1149	0.1035

n \ i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
24	0.0107										
25	0.0200	0.0000									
26	0.0284	0.0094									
27	0.0358	0.0178	0.0000								
28	0.0424	0.0253	0.0084								
29	0.0483	0.0320	0.0159	0.0000							
30	0.0537	0.0381	0.0227	0.0076							
31	0.0585	0.0435	0.0289	0.0144	0.0000						
32	0.0629	0.0485	0.0344	0.0206	0.0068						
33	0.0669	0.0530	0.0395	0.0262	0.0187	0.0000					
34	0.0706	0.0572	0.0441	0.0314	0.0187	0.0062					
35	0.0739	0.0610	0.0484	0.0361	0.0239	0.0119	0.0000				
36	0.0770	0.0645	0.0523	0.0404	0.0287	0.0172	0.0057				
37	0.0798	0.0677	0.0559	0.0444	0.0331	0.0220	0.0110	0.0000			
38	0.0824	0.0706	0.0592	0.0481	0.0372	0.0264	0.0158	0.0053			
39	0.0848	0.0733	0.0622	0.0515	0.0409	0.0305	0.0203	0.0101	0.0000		
40	0.0870	0.0759	0.0651	0.0546	0.0444	0.0343	0.0244	0.0146	0.0049		
41	0.0891	0.0782	0.0677	0.0575	0.0476	0.0379	0.0283	0.0188	0.0094	0.0000	
42	0.0909	0.0804	0.0701	0.0602	0.0506	0.0411	0.0318	0.0227	0.0136	0.0045	
43	0.0927	0.0824	0.0724	0.0628	0.0534	0.0442	0.0352	0.0263	0.0175	0.0087	0.0000

- Tabla de coeficientes a_{in} para el contraste de Shapiro-Wilk.-

Estos coeficientes $a_{i\,4l}$ se listan de 1 a $n/2$.

- Consultando el listado de n valores ΔX_i ordenados se calculan los siguientes $n/2$ valores d_i:

$$d_i = \Delta X_i - \Delta X_{n-i+1}$$

Donde n sigue correspondiendo al tamaño de la muestra.

- Se multiplican a_{i4l} x d_i obteniendo $n/2$ valores, que sumando todos ellos resulta el valor b:

$$b = \sum_{i=1}^{n/2} a_{i41} \cdot d_i$$

- Con esto se puede calcular el coeficiente de correlación de Shapiro Wilk W_c:

$$W_c = \frac{b^2}{z}$$

- Este valor W_c se compara con el coeficiente de correlación mínimo W_t que se obtiene de la siguiente tabla, ingresando por el tamaño de la muestra y por el nivel de significancia:

Niveles de significación para el contraste de Shapiro-Wilks.

n	0.01	0.02	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.98	0.99
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	0.998	0.999	1.000	1.000
4	0.687	0.707	0.748	0.792	0.935	0.987	0.992	0.996	0.997
5	0.686	0.715	0.762	0.806	0.927	0.979	0.986	0.991	0.993
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927	0.974	0.981	0.986	0.989
7	0.730	0.760	0.803	0.838	0.928	0.972	0.979	0.985	0.988
8	0.749	0.778	0.818	0.851	0.932	0.972	0.978	0.984	0.987
9	0.764	0.791	0.829	0.859	0.935	0.972	0.978	0.984	0.986
10	0.781	0.806	0.842	0.869	0.938	0.972	0.978	0.983	0.986
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	0.973	0.979	0.984	0.986
12	0.805	0.828	0.859	0.883	0.943	0.973	0.979	0.984	0.986
13	0.814	0.837	0.866	0.889	0.945	0.974	0.979	0.984	0.986
14	0.825	0.846	0.874	0.895	0.947	0.975	0.980	0.984	0.986
15	0.835	0.855	0.881	0.901	0.950	0.975	0.980	0.984	0.987
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952	0.976	0.981	0.985	0.987
17	0.851	0.869	0.892	0.910	0.954	0.977	0.981	0.985	0.987
18	0.858	0.874	0.897	0.914	0.956	0.978	0.982	0.986	0.988
19	0.863	0.879	0.901	0.917	0.957	0.978	0.982	0.986	0.988
20	0.868	0.884	0.905	0.920	0.959	0.979	0.983	0.986	0.988
21	0.873	0.888	0.908	0.923	0.960	0.980	0.983	0.987	0.989
22	0.878	0.892	0.911	0.926	0.961	0.980	0.984	0.987	0.989
23	0.881	0.895	0.914	0.928	0.962	0.981	0.984	0.987	0.989
24	0.884	0.898	0.916	0.930	0.963	0.981	0.984	0.987	0.989
25	0.888	0.901	0.918	0.931	0.964	0.981	0.985	0.988	0.989
26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965	0.982	0.985	0.988	0.989
27	0.894	0.906	0.923	0.935	0.965	0.982	0.985	0.988	0.990
28	0.896	0.908	0.924	0.936	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
29	0.898	0.910	0.926	0.937	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
30	0.900	0.912	0.927	0.939	0.967	0.983	0.985	0.988	0.990
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967	0.983	0.986	0.988	0.990
32	0.904	0.915	0.930	0.941	0.968	0.983	0.986	0.988	0.990
33	0.906	0.917	0.931	0.942	0.968	0.983	0.986	0.989	0.990
34	0.908	0.919	0.933	0.943	0.969	0.983	0.986	0.989	0.990
35	0.910	0.920	0.934	0.944	0.969	0.984	0.986	0.989	0.990
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970	0.984	0.986	0.989	0.990
37	0.914	0.924	0.936	0.946	0.970	0.984	0.987	0.989	0.990
38	0.916	0.925	0.938	0.947	0.971	0.984	0.987	0.989	0.990
39	0.917	0.927	0.939	0.948	0.971	0.984	0.987	0.989	0.991
40	0.919	0.928	0.940	0.949	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
41	0.920	0.929	0.941	0.950	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
42	0.922	0.930	0.942	0.951	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
43	0.923	0.932	0.943	0.951	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991

- Tabla con valores de significancia o significación para el contraste de Shapiro-Wilk.-

Como en este caso el tamaño de la muestra es ***n*** = 41 y la significancia de 0.05 el valor W_t o correlación mínima es 0.941. En el caso de la muestra de ΔX el W_c obtenido es 0.95876. Como se sobrepasa la correlación mínima, no hay evidencia para rechazar la hipótesis de que la muestra sigue una distribución normal.

- Un último paso para verificar la normalidad de la muestra es hallar la verdadera significancia (o *valor-p*) para el coeficiente de correlación calculado. La misma se obtiene de la última tabla, ingresando por ***n*** y por el W_c calculado. Como la tabla es una serie de valores discretizada, para hallar el *valor-p* hay que interpolar o plantear una regresión. Observando la tabla se aprecia que el *valor-p* se encuentra entre 0.1 y 0.5, que es mayor a la significancia de 0.05, lo que es suficiente para confirmar que no se rechaza la hipótesis de normalidad.

Este procedimiento se ejecutó con el programa *RStudio*, obteniendo para las tres series de datos los resultados que se exponen a continuación:

```
> deltaE <- c(0.0361,-0.0519,-0.0041,-0.0799,-0.0444,-0.0332,-0.0393,
0.0098,-0.0527,0.1121,-0.0218,0.0379,-0.0007,0.0065,-0.0244,0.0391,0.0
066,-0.0104,-0.0243,0.0853,-0.0207,0.0351,0.0257,0.0203,-0.0410,-0.017
1,-0.0207,-0.0314,0.0565,0.0303,-0.0250,0.0680,-0.0421,0.0508,0.0180,-
0.0357,0.0428,-0.0626,0.1139,-0.0723,-0.0304)
> shapiro.test(deltaE)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  deltaE
W = 0.95876, p-value = 0.1423

> deltaN <- c(0.0047,0.0415,-0.0158,0.0562,0.0411,0.0495,0.0215,-0.002
5,-0.0190,0.0938,0.0344,0.0959,0.0728,0.0478,0.0316,0.0147,0.1437,0.13
74,-0.0365,0.0650,0.0275,0.0295,-0.0268,0.0140,0.0377,0.0190,0.0230,0.
0360,-0.0718,-0.0431,0.0516,-0.0508,0.1429,0.0321,-0.0134,0.0658,0.075
7,-0.0258,-0.0985,-0.0073,0.0849)
> shapiro.test(deltaN)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  deltaN
W = 0.98302, p-value = 0.7882

> deltaH <- c(-0.0093,-0.0332,-0.1252,-0.0434,-0.0999,0.0049,-0.0415,-
0.0742,-0.0318,-0.0621,-0.0136,-0.0115,-0.0339,-0.1037,-0.0436,-0.015
8,0.0081,-0.0174,-0.0073,-0.0328,-0.0132,-0.0929,0.0362,0.0348,0.0196,
-0.0060,-0.0756,-0.0429,0.0157,-0.0655,-0.0694,-0.0017,-0.0418,0.0236,
0.0275,-0.0422,-0.0069,-0.0418,-0.0974,-0.0833,-0.0512,0.0458)
> shapiro.test(deltaH)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  deltaH
W = 0.98013, p-value = 0.6665
```

- Impresión de pantalla de *RStudio*, mostrando los resultados de la prueba de normalidad.-

En las tres pruebas, la significación estadística o *valor-p* es mayor a 0.05, por lo que se acepta la hipótesis de que las muestras siguen una distribución normal.

Por otro lado, la aleatoriedad de las muestras se analiza aplicando el test de Ljung-Box.

El método consiste en plantear una hipótesis H_0 que implica que la muestra es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.). Luego se aplica un algoritmo que sirve para aceptar la H_0 o rechazarla. El algoritmo es el siguiente (ejemplo de la muestra ΔN):

- En primer lugar se calculan los coeficientes de correlación muestral de rezago (*Lag* $_j$, por rezago en inglés) que, básicamente, vinculan cada observación de la muestra con observaciones anteriores. Se recomienda que la cantidad de *Lags* calculados esté entre el 5% y el 10% de la cantidad de datos con los que se cuenta. En el caso de ΔN, la cantidad de datos ***n*** = 41 por lo que calculamos hasta *Lag* $_4$.

Lag_0 , surge de la suma de los ***n*** Lag_{0i} que se calculan de la siguiente manera:

$Lag_{0i} = (\Delta N_i - \boldsymbol{p}) \times (\Delta N_i - \boldsymbol{p})$, siendo ***p*** el promedio de toda la muestra e *i* variando de 1 a ***n***.

Lag_1 , surge de la suma de ***n*** - 1 Lag_{1i} que se calculan de la siguiente manera:

$Lag_{1i} = (\Delta N_i - \boldsymbol{p}) \times (\Delta N_{i-1} - \boldsymbol{p})$, con *i* variando de 2 a ***n***.

Lag_2 , surge de la suma de ***n*** - 2 Lag_{2i} que se calculan de la siguiente manera:

$Lag_{2i} = (\Delta N_i - \boldsymbol{p}) \times (\Delta N_{i-2} - \boldsymbol{p})$, con *i* variando de 3 a ***n***.

Lag_3 , surge de la suma de ***n*** - 3 Lag_{3i} que se calculan de la siguiente manera:

$Lag_{3i} = (\Delta N_i - \boldsymbol{p}) \times (\Delta N_{i-3} - \boldsymbol{p})$, con *i* variando de 4 a ***n***.

Lag_4 , surge de la suma de ***n*** - 4 Lag_{4i} que se calculan de la siguiente manera:

$Lag_{4i} = (\Delta N_i - \boldsymbol{p}) \times (\Delta N_{i-4} - \boldsymbol{p})$, con *i* variando de 5 a ***n***.

Entonces,

$$Lag_0 = \sum_{i=1}^{n} Lag_{0i} \; , \; Lag_1 = \sum_{i=2}^{n} Lag_{1i} \; , \; Lag_2 = \sum_{i=3}^{n} Lag_{2i} \; , \; Lag_3 = \sum_{i=4}^{n} Lag_{3i}$$

y $$Lag_4 = \sum_{i=5}^{n} Lag_{4i}$$

- El paso siguiente es calcular z:

$$z = \sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i - p)^2$$

- Se calculan ahora los ACF (Función de Autocorrelación) para cada Lag_j, con j de 0 a 4.

$$ACF_j = \frac{Lag_j}{z}$$

- Se calcula el estadístico de Ljung-Box, llamado *Q*.

Para j = 1,

$$Q_1 = n(n+2)\frac{ACF_1^2}{n-1}$$

Para j = 2,

$$Q_2 = n(n+2)\sum_{j=1}^{2}\frac{ACF_j^2}{n-j}$$

Para j = 3,

$$Q_3 = n(n+2)\sum_{j=1}^{3}\frac{ACF_j^2}{n-j}$$

Y para j = 4,

$$Q_4 = n(n+2)\sum_{j=1}^{4}\frac{ACF_j^2}{n-j}$$

El estadístico Q tiene una distribución aproximada $\chi^2(j)$.

- Se calcula el *valor-p* para cada *j*, a partir del valor $\chi^2_{1-\alpha, j}$ donde *j* son los grados de libertad. Se utiliza la siguiente fórmula chisqdist(*Q*, *j*) en *LibreOffice Calc* o chisq.dist(*Q*, *j*) en *Excel* y se obtiene un valor que se resta a 1. Esta función ingresa a la siguiente tabla por el valor Q (χ^2) y los grados de libertad *j*.

Grados de libertad (df)	valor χ^2										
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.63	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59
Valor *p* (probabilidad)	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001

- Tabla de valores χ^2 y valores-p.-

En la última fila de la tabla figura el *valor-p* calculado. Si el *valor-p* es mayor a la significancia de 0.05, es suficiente para confirmar que no se rechaza la hipótesis nula.

Este procedimiento se ejecutó con el programa *RStudio*, obteniendo para las dos series de datos los resultados que se exponen a continuación:

```
> deltaN
 [1]  0.0047  0.0415 -0.0158  0.0562  0.0411  0.0495  0.0215 -0.0025 -0.0190  0.0938  0.0344  0.0959
[13]  0.0728  0.0478  0.0316  0.0147  0.1437  0.1374 -0.0365  0.0650  0.0275  0.0295 -0.0268  0.0140
[25]  0.0377  0.0190  0.0230  0.0360 -0.0718 -0.0431  0.0516 -0.0508  0.1429  0.0321 -0.0134  0.0658
[37]  0.0757 -0.0258 -0.0985 -0.0073  0.0849
> Box.test(deltaN,lag=1,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaN
X-squared = 0.07373, df = 1, p-value = 0.786

> Box.test(deltaN,lag=2,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaN
X-squared = 0.77746, df = 2, p-value = 0.6779

> Box.test(deltaN,lag=3,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaN
X-squared = 0.82608, df = 3, p-value = 0.8432

> Box.test(deltaN,lag=4,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaN
X-squared = 0.83127, df = 4, p-value = 0.9342

> deltaE
 [1]  0.0361 -0.0519 -0.0041 -0.0799 -0.0444 -0.0332 -0.0393  0.0098 -0.0527  0.1121 -0.0218  0.0379
[13] -0.0007  0.0065 -0.0244  0.0391  0.0066 -0.0104 -0.0243  0.0853 -0.0207  0.0351  0.0257  0.0203
[25] -0.0410 -0.0171 -0.0207 -0.0314  0.0565  0.0303 -0.0250  0.0680 -0.0421  0.0508  0.0180 -0.0357
[37]  0.0428 -0.0626  0.1139 -0.0723 -0.0304
> Box.test(deltaE,lag=1,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaE
X-squared = 5.9619, df = 1, p-value = 0.01462

> Box.test(deltaE,lag=2,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaE
X-squared = 10.704, df = 2, p-value = 0.004739

> Box.test(deltaE,lag=3,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaE
X-squared = 10.836, df = 3, p-value = 0.01265

> Box.test(deltaE,lag=4,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaE
X-squared = 10.942, df = 4, p-value = 0.02722
```

- Impresión de pantalla de *RStudio*, mostrando los resultados de la prueba de aleatoriedad para ΔN y ΔE.-

```
> deltaH
 [1] -0.0093 -0.0332 -0.1252 -0.0434 -0.0999  0.0049 -0.0415 -0.0742
 [9] -0.0318 -0.0621 -0.0136 -0.0115 -0.0339 -0.1037 -0.0436 -0.0158
[17]  0.0081 -0.0174 -0.0073 -0.0328 -0.0132 -0.0929  0.0362  0.0348
[25]  0.0196 -0.0060 -0.0756 -0.0429  0.0157 -0.0655 -0.0694 -0.0017
[33] -0.0418  0.0236  0.0275 -0.0422 -0.0069 -0.0418 -0.0974 -0.0833
[41] -0.0512  0.0458
> Box.test(deltaH,lag=1,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaH
X-squared = 0.53803, df = 1, p-value = 0.4633

> Box.test(deltaH,lag=2,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaH
X-squared = 0.66395, df = 2, p-value = 0.7175

> Box.test(deltaH,lag=3,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaH
X-squared = 1.6294, df = 3, p-value = 0.6527

> Box.test(deltaH,lag=4,type=c("Ljung-Box"))

        Box-Ljung test

data:  deltaH
X-squared = 2.9472, df = 4, p-value = 0.5667
```

- Impresión de pantalla de *RStudio*, mostrando los resultados de la prueba de aleatoriedad para ΔH.-

Como se ve en los resultados, en el caso de la muestra de ΔE se rechaza la hipótesis de aleatoriedad. Para la muestra de ΔN y ΔH, como el valor p es mayor a 0,05 en todo los casos, las muestras cumplen con la H_0.

Más allá de los controles estadísticos, aunque no se cumpla la aleatoriedad en ΔE, se realiza el test estadístico NSSDA.

Se presentan a continuación los datos utilizados para el cálculo del estadístico.

N° punto	ΔE²	ΔN²	ΔH²
0	0,001	0,000	0,000
1	0,003	0,002	0,001
2	0,000	0,000	0,016
3	0,006	0,003	0,002
4	0,002	0,002	0,013
5	0,001	0,002	0,000
6	0,002	0,000	0,002
7	0,000	0,000	0,006
8	0,003	0,000	0,001
9	0,013	0,009	0,004
10	0,000	0,001	0,000
11	0,001	0,009	0,000
12	0,000	0,005	0,001
13	0,000	0,002	0,011
14	0,001	0,001	0,002
15	-----	-----	0,000
16	0,002	0,000	0,000
17	0,000	0,021	0,001
18	0,000	0,019	0,000
19	0,001	0,001	0,001
20	0,007	0,004	0,001
21	0,000	0,001	0,007
22	0,001	0,001	0,001
23	0,001	0,001	0,001
24	0,000	0,000	0,000
25	0,002	0,001	0,000
26	0,000	0,000	-----
27	0,000	0,001	0,006
28	0,001	0,001	0,002
29	0,003	0,005	0,001
30	0,001	0,002	0,004
31	0,001	0,003	0,007
32	0,005	0,003	0,000
33	0,002	0,020	0,002
34	0,003	0,001	0,000
35	0,000	0,000	0,001
36	0,001	0,004	0,002
37	-----	-----	0,000
38	0,002	0,006	0,002
39	0,004	0,001	0,011
40	0,013	0,010	0,004
41	0,005	0,000	0,005
42	0,001	0,007	0,001
SUMA	0,089	0,151	0,102
Promedio	0,002	0,004	0,003
RMSE	0,047	0,061	0,052
RMSExy	0,054		
NSSDA	**0,094**		**0,103**

- Datos utilizados para el cálculo del estadístico NSSDA.-

Donde:

- **Suma** = $\sum \Delta E^2$, $\sum \Delta N^2$ y $\sum \Delta H^2$
- **Promedio** = $\sum (\Delta E^2)/n$, $\sum (\Delta N^2)/n$ y $\sum (\Delta H^2)/n$
  siendo *n*: número de puntos.
- **RMSE** = $\sqrt{Promedio}$
- $RMSE_{XY} = \sqrt{(RMSE_E)^2 + (RMSE_N)^2}$

El estadístico NSSDA, para un 95% de confianza para las componentes E y N se calcula: **NSSDA = 1,7308 x $RMSE_{EN}$**

El estadístico NSSDA, para un 95% de confianza para la componente H se calcula: **NSSDA = 1,9600 x RMSE**

Resultados:

- Precisión posicional horizontal testeada: 0,094 metros para un nivel de confianza de 95%.
- Precisión posicional en altura testeada: 0,103 metros para un nivel de confianza de 95%.

Conclusión:

El ortomosaico y la nube de puntos entregados por el consorcio GEOIMAGEN-TOPOCART, que surge como resultado del vuelo de Noviembre de 2024, cumple con el requisito de precisión indicado en las especificaciones técnicas del pliego licitatorio. Esto se puede concluir por los resultados obtenidos de la aplicación del estándar NSSDA indicados anteriormente.