

Nivelación GPS sobre la Red CDM de Montevideo

Refinamiento del estudio del comportamiento del modelo geoidal EGM96 en el Departamento de Montevideo

Ing. Agrim. Jorge Faure Valbi Tutor: Ing. Agrim. Fabián Barbato

Programa: Jóvenes Investigadores, CSIC

Año 2004

Indice

	Página
1. Resumen.	4
2. Análisis teórico.	5
2.1 Análisis del Sistema CDM.	5
2.2 Determinación del Datum Vertical.	9
2.3 Dificultades en la determinación del Datum Vertical.	10
2.4 Procedimiento para la determinación de las alturas de la Red.	11
2.5 El dato altimétrico dado por el GPS.	13
2.6 Análisis de la relación entre alturas ortométricas y alturas elipsoidales.	14
2.7 Análisis de la influencia de Φ en la zona de estudio.	15
2.8 Análisis de los datos disponibles.	17
2.9 Análisis de ΔN .	21
3. Procesamiento y análisis de los datos.	23
3.1 Vértices seleccionados.	23
3.2 Presentación de los datos.	24
3.3 Determinación de los parámetros de las funciones estimadoras de ΔN .	26
3.3.1 Función de 4 parámetros.	26
3.3.2 Función de 5 parámetros.	28
3.4 Análisis de resultados.	29
3.4.1 Función de 4 parámetros.	29
3.4.1.1 Análisis absoluto.	29
3.4.1.2 Análisis relativo.	31
3.4.2 Función de 5 parámetros.	33
3.4.2.1 Análisis absoluto.	33
3.4.2.2 Análisis relativo.	34
4. Conclusiones.	35
5. Recomendaciones	36
6. Bibliografía.	36

Indice de figuras

	<i>Página</i>
1. Datum Clásico.	5
2. Aproximación del elipsoide local.	6
3. Vértices Geodésicos de Primer Orden.	6
4. Vértices Geodésicos de Segundo Orden.	7
5. Vértices Geodésicos de Tercer Orden.	7
6. Vértices Geodésicos de Cuarto Orden.	8
7. Red Altimétrica CDM.	9
8. Datum vertical clásico.	10
9. Determinación del desnivel AB, desde Estación 1.	11
10. Determinación del desnivel AB, desde Estación 2.	12
11. Esquema de las alturas CDM.	12
12. Coordenadas obtenidas del posicionamiento satelital GPS.	13
13. Altura elipsoidal, ortométrica y desviación relativa de la vertical.	14
14. Esquema simplificado.	15
15. Triángulo esférico auxiliar.	16
16. Página 1 de la Monografía del vértice 1-0312-C.	17
17. Página 2 de la Monografía del vértice 1-0312-C.	18
18. Página 3 de la Monografía del vértice 1-0312-C.	19

1. Resumen.

La generalización del uso en diversas áreas de la actividad profesional de los equipos de posicionamiento globales (GPS), y especialmente sus aplicaciones en nivelación, ha generado la necesidad de compatibilizar los datos obtenidos a partir de las observaciones realizadas en sistemas tridimensionales modernos, con los datos que se conocen en los sistemas clásicos, es decir transformar alturas de tipo matemático en alturas de tipo físico. Tal procedimiento consiste en transformar alturas elipsoidales, obtenidas mediante observaciones satelitales realizadas con GPS, en alturas ortométricas. En tal sentido, deberá estudiarse el comportamiento de la superficie física de referencia, el geoide, así como el sistema de referencia altimétrico local (CDM).

El objetivo específico del presente trabajo es el determinar alturas referidas al sistema de referencia CDM a partir de observaciones satelitales realizadas con GPS, utilizando el modelo geoidal global EGM96.

Para estudiar las diferencias surgidas entre la ondulación geoidal obtenida a partir del modelo EGM96, y la calculada a partir de los datos del CDM y las alturas elipsoidales, se aplicarán dos modelos matemáticos.

Finalmente se estudiarán los resultados que se obtienen en la determinación de diferencias relativas de nivel.

2. Análisis teórico.

2.1 Análisis del Sistema CDM.

En los años 60 un sistema geodésico específico fue calculado y establecido para el Departamento de Montevideo, el CDM, Consejo Departamental de Montevideo.

El Sistema CDM, como todo sistema de referencia local clásico queda definido por la elección de:

- un elipsoide de referencia: Intenacional.
- un punto origen conocido como punto datum: I-Fortaleza,
- un acimut de partida: I-Joanicó

El punto datum es aquel en el cual se fija la coincidencia de la normal al elipsoide y la vertical del lugar, sus coordenadas se han obtenido por un procedimiento astro-geodésico.

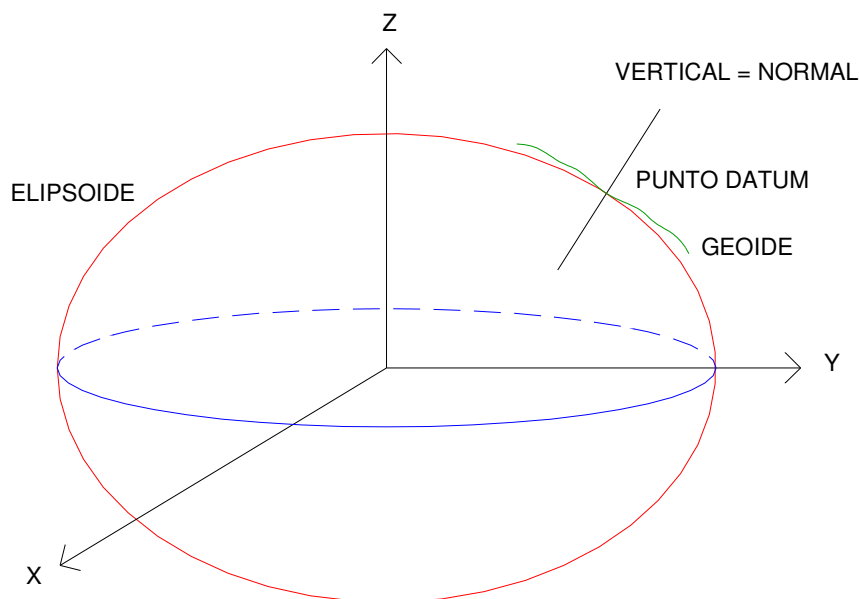


Fig. 1 Datum Clásico

De esta forma se establece su ubicación en relación con la forma física de la Tierra, o sea el geoide. Al ubicar el elipsoide de referencia de la forma descrita, el mismo aproxima al geoide en el entorno del punto datum. Al aumentar la distancia a dicho punto, es mayor la posibilidad de que disminuya la precisión de la aproximación elipsoide - geoide. Esto determina que este tipo de sistemas sean aplicables solo dentro de un país, o una región del mismo.

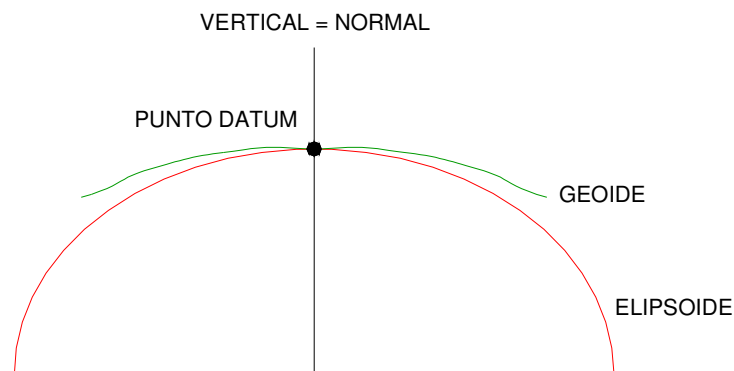


Fig. 2 Aproximación del elipsoide local.

Estos sistemas de referencia son bidimensionales, latitud y longitud sobre el elipsoide. El marco de referencia del sistema geodésico CDM, está constituido por una serie de monumentaciones, distribuidas en todo el departamento y que se clasifican en vértices de Primer, Segundo, Tercer y Cuarto Orden, de acuerdo a la precisión en sus coordenadas (latitud y longitud) derivadas de la metodología utilizada para su determinación.

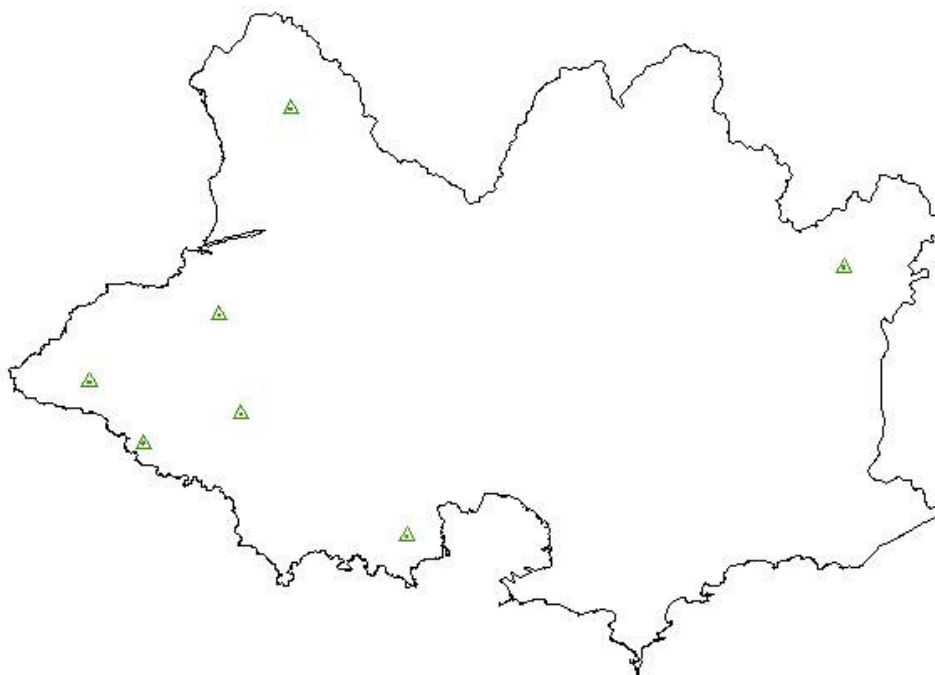


Fig. 3 Vértices Geodésicos de Primer Orden.

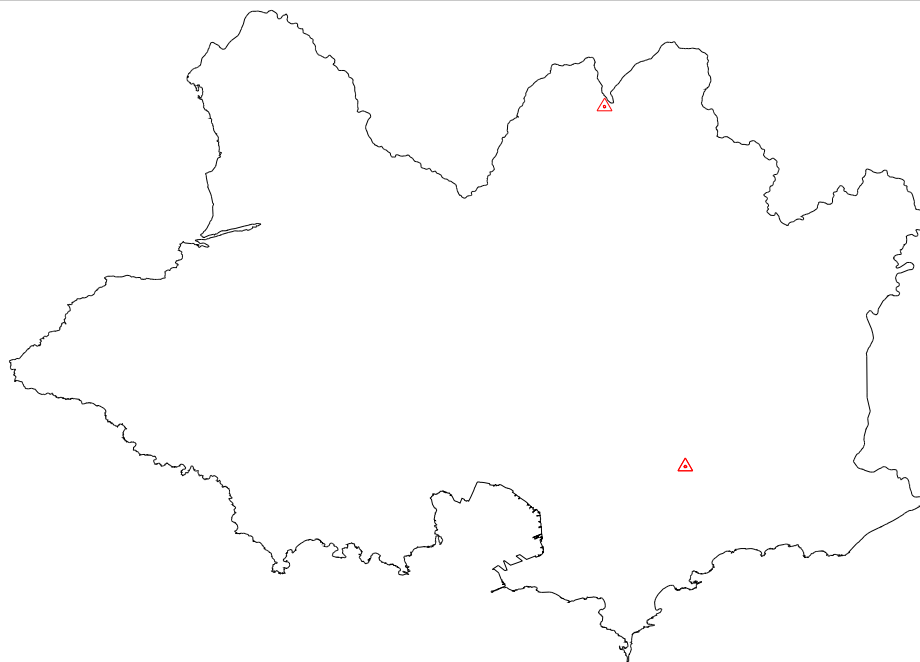


Fig. 4 Vértices Geodésicos de Segundo Orden.

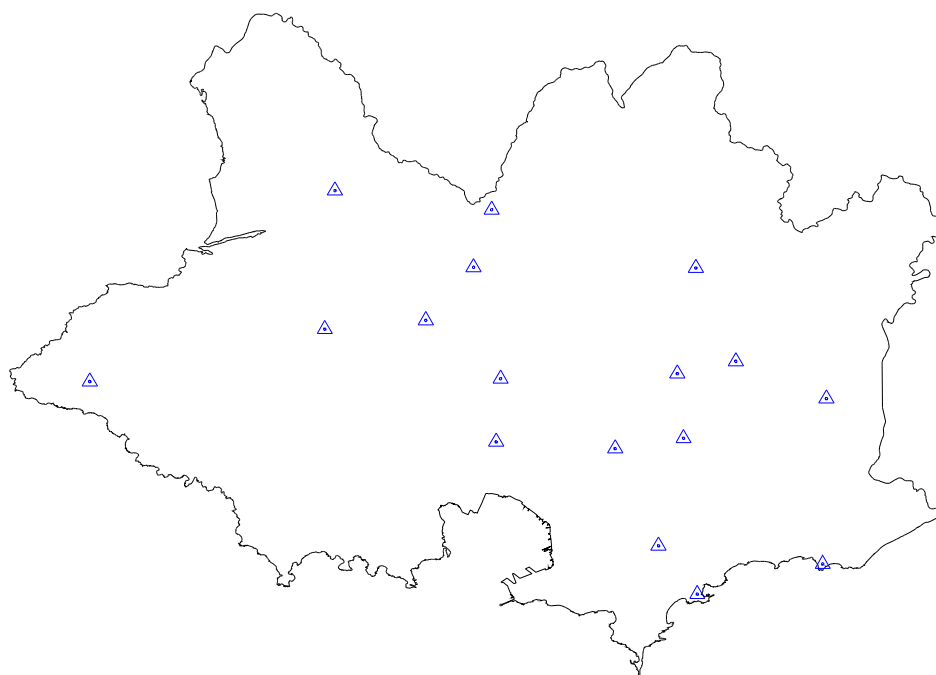


Fig. 5 Vértices Geodésicos de Tercer Orden.

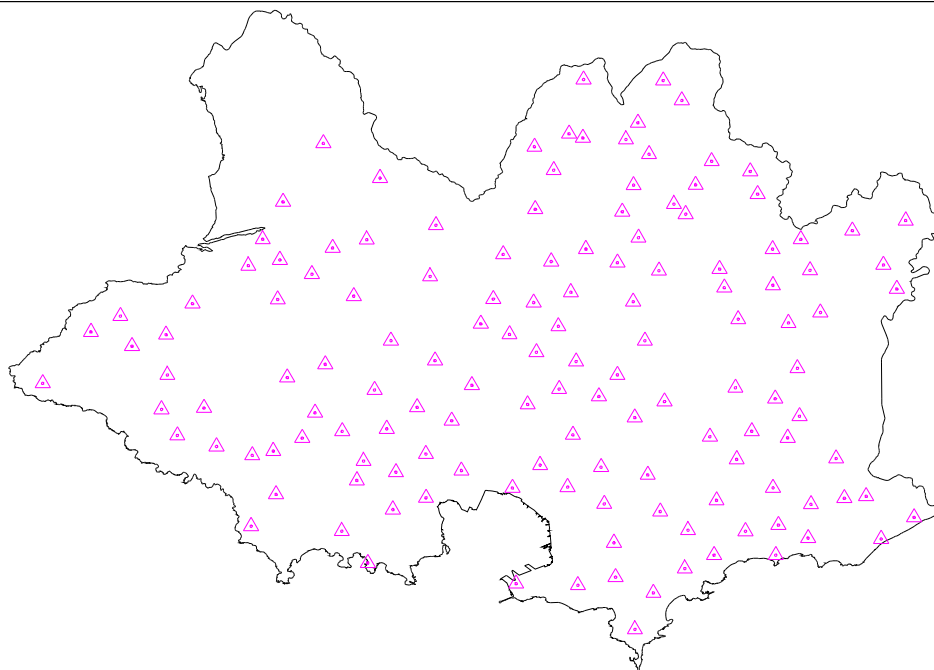


Fig. 6 Vértices Geodésicos de Cuarto Orden.

El sistema de referencia altimétrico se establece en forma independiente al planimétrico.

En nuestro departamento, el sistema altimétrico local, CDM, está determinado a partir de la fijación del origen o datum vertical, también conocido como cero.

Nuestro sistema CDM, adoptó como Datum Vertical, el establecido según decreto del año 1948, y el cual establece que el sistema de alturas tiene el origen de la escala (cero oficial) a 22.97 m por debajo del repere ubicado en el edificio del Cabildo. Este valor fue adoptado a partir de observaciones del nivel medio de las aguas en el Puerto de Montevideo, analizadas en un período superior a los 20 años. De esta manera se buscó la coincidencia entre el Datum Vertical y el nivel medio del mar.

Una vez establecido el cero de la escala, la determinación de la red altimétrica se efectuó mediante polígonos cerrados (4), cuyos lados constituyen líneas de nivelación geométrica de alta precisión, líneas de Primer Orden. Estos polígonos cerrados permitieron realizar un ajuste a partir del cierre de los mismos. Líneas de Segundo Orden se establecieron posteriormente, en la etapa final se procedió a una densificación mediante puntos de Tercer y Cuarto Orden.

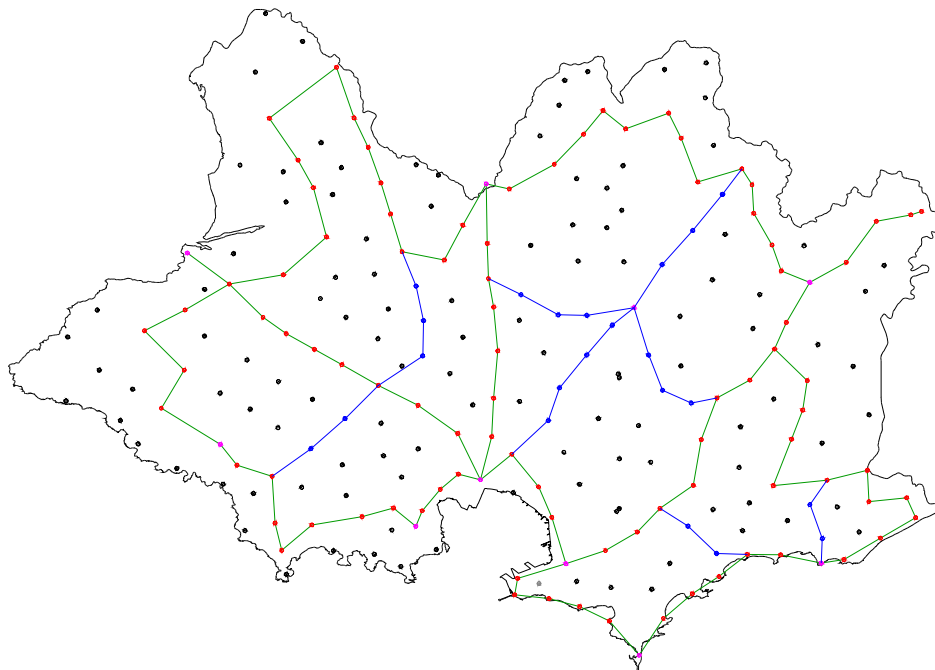


Fig. 7 Red Altimétrica CDM.

2.2 Determinación del Datum Vertical.

Teniendo en cuenta que tres cuartas partes de la superficie de la Tierra están cubiertas por agua, y que la superficie de un líquido en reposo copia la forma de una superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre, surge la idea de utilizar la superficie del mar para representar una de las infinitas superficies equipotenciales. Esta superficie en particular se la denomina geode.

La expresión matemática del geode es $W(\lambda, \theta, r) = W_0$, donde W_0 es una constante cuyo valor debe determinarse convenientemente, de modo que la superficie equipotencial resultante se ajuste al nivel del mar.

La determinación del nivel del mar a los efectos de materializar el geode, requiere la superación de dificultades prácticas y conceptuales. Se debe tener en cuenta que la superficie del mar, no se corresponde en realidad, con la de un líquido en reposo, esto debido a un par de causas principales.

Filtrando el efecto del oleaje, el nivel del mar en un instante y en un sitio cualquiera puede pensarse como la resultante de tres contribuciones:

- 1) El Nivel Medio.
- 2) La marea. Es la oscilación vertical periódica del nivel del mar producida por la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol, a la que se suma la Fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra. La corriente de marea

es el movimiento horizontal, asociado al vertical, producido por las mismas causas.

3) La Onda de Tormenta. Se debe a la fuerza tangencial que el viento ejerce sobre la superficie del mar.

El movimiento de retrogradación de los nodos de la órbita lunar sobre la Eclíptica, respecto de las estrellas fijas, tiene un período de 18.67 años. El nivel medio del mar se define como la media aritmética de alturas de marea registradas con un intervalo horario o menor a lo largo de 18.67 años, lo que permite cancelar todos los efectos variables de las mareas. De esta forma, se definió clásicamente el datum vertical, asumiendo que dicho nivel medio del mar coincide con el geoide. Este fue el procedimiento seguido en nuestro país para determinar el Origen de las Alturas.

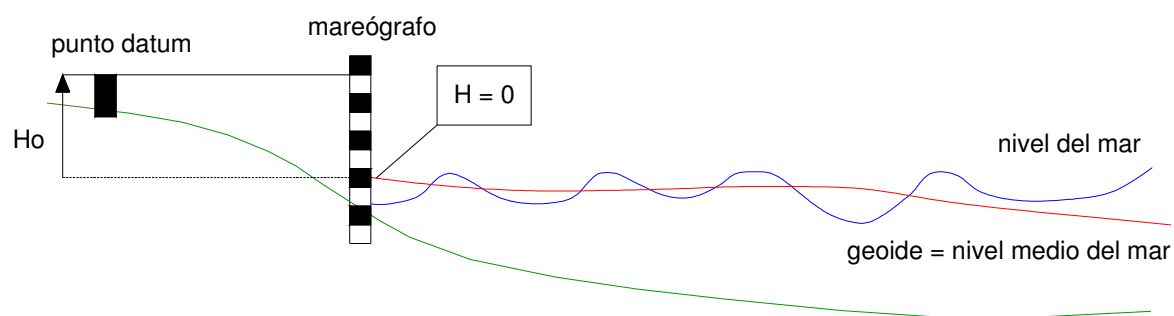


Fig. 8. Datum vertical clásico.

2.3 Dificultades en la determinación del Datum Vertical.

En nuestro país se utilizaron los registros del mareógrafo instalado en el Puerto de Montevideo para calcular el valor medio del nivel del mar, a partir del cual se estableció el Datum Vertical.

Esta elección tiene implícita la suposición de que las aguas del Puerto de Montevideo se comportan de acuerdo a las características de un régimen oceánico. En realidad, las aguas del Puerto de Montevideo, pertenecen al Río de la Plata, por lo cual es incorrecto suponer un régimen oceánico para ellas.

Suponiendo que fuese un régimen oceánico, el nivel del mar varía con el flujo de las corrientes oceánicas, la presión atmosférica, la temperatura, la salinidad de las aguas, entre otros factores. A consecuencia de ello, la media aritmética de las alturas de mareas registradas a lo largo de 18.67 años, proporciona un nivel medio que, en general, no coincide con el geoide, ni con ninguna otra superficie de nivel del campo gravitacional, sino que se eleva o se deprime por encima o por debajo de él, dando lugar a un efecto que se denomina topografía de la superficie del mar. La topografía de la superficie del mar presenta una variabilidad temporal y espacial.

En resumen, para la determinación del Datum Vertical, se consideró un régimen oceánico para las aguas del Puerto de Montevideo, cuando no lo es. Suponiendo un régimen oceánico, no se tuvo en cuenta la topografía de la superficie del mar.

2.4 Procedimiento para la determinación de las alturas de la Red.

El procedimiento seguido para la determinación de las líneas de Primer Orden, fue el de una nivelación geométrica de alta precisión. Ello implica ubicar el telescopio del instrumento tangente a la superficie equipotencial por el centro del mismo. De esta forma la vertical del lugar coincide con el eje principal del instrumento y en forma simultánea, el telescopio describe un plano horizontal.

Las lecturas que se realizan sobre las miras, corresponden a la intersección del plano señalado y las miras. Este procedimiento, determina diferencias de nivel geométrico, teniendo en cuenta las infinitas superficies equipotenciales de la gravedad, así como las diferentes posiciones que ocupa el instrumento a lo largo de una línea de nivelación, se deduce que la diferencia de nivel calculada por este método depende del caminamiento seguido.

A modo de ilustrar lo señalado, las siguientes figuras indican dos posibles caminamientos seguidos para determinar la diferencia de nivel entre el punto A y el punto B.

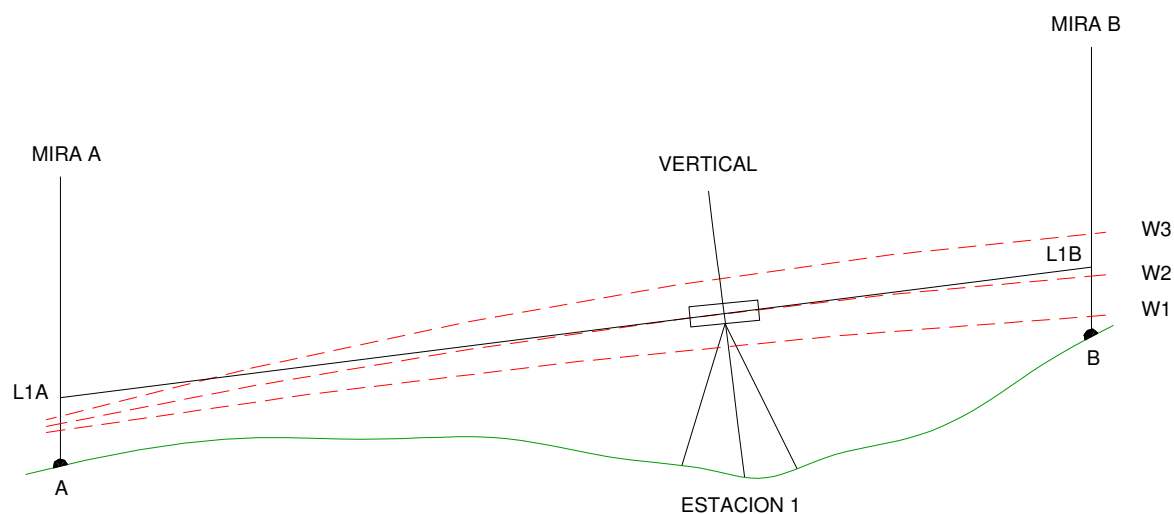


Fig. 9 Determinación del desnivel AB, desde Estación 1.

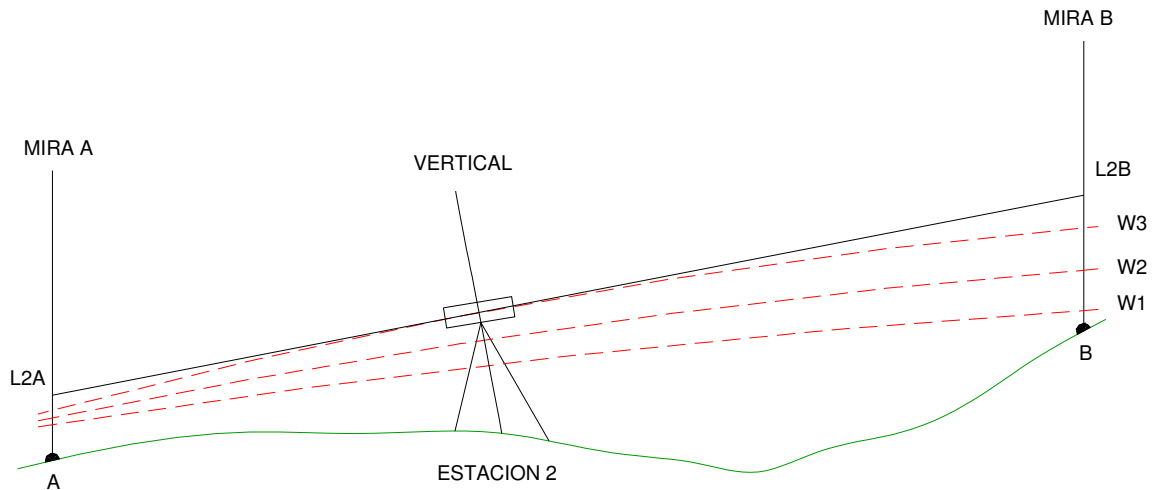


Fig. 10 Determinación del desnivel AB, desde Estación 2.

$$\Delta H1 = L1A - L1B$$

$$\Delta H2 = L2A - L2B$$

Evidentemente $\Delta H1$ y $\Delta H2$ no tienen por que ser iguales, en un caso se consideró la superficie equipotencial W2 y en la otra W3.

Lo señalado indica un inconveniente en nuestra red. Es decir, las alturas a las que se refiere el CDM, son alturas niveladas, en particular mediante nivelación geométrica.

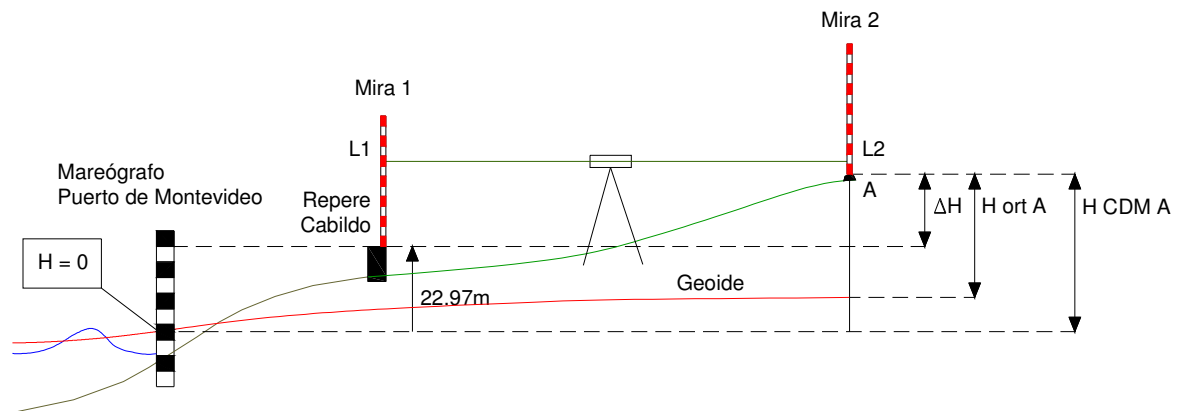


Fig. 11. Esquema de las alturas CDM.

La figura 10 muestra esquemáticamente las diferentes magnitudes que se encuentran involucradas en la determinación de alturas en el Departamento de Montevideo.

$$\Delta H = L2 - L1$$

Desnivel geométrico medido entre Repere Cabildo y el Punto A.

$$H_{\text{CDM A}} = 22.97 + \Delta H$$

Altura en el sistema CDM del Punto A, es la distancia vertical entre el Punto A y la Referencia Vertical.

$H_{\text{ort A}}$

Distancia vertical del Punto A al geode.

2.5 El dato altimétrico dado por el GPS.

El sistema GPS permite obtener posiciones precisas tridimensionales referidas al sistema de referencia WGS-84. A partir de estas se derivan posiciones altimétricas expresadas como alturas elipsoidales (h) sobre el sistema de referencia mencionado.

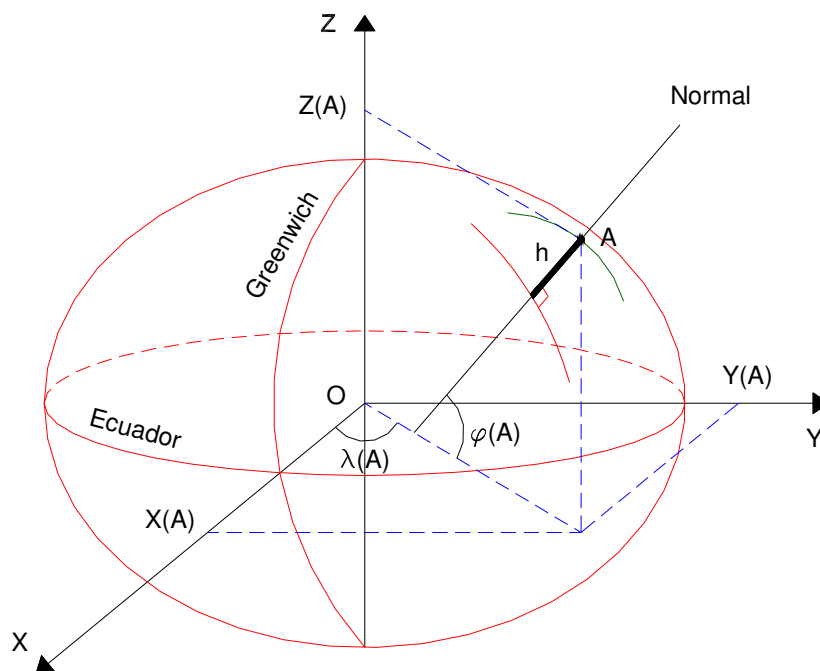


Fig. 12. Coordenadas obtenidas del posicionamiento satelital GPS.

Las alturas elipsoidales, son de tipo matemático, por lo cual no responden a ningún principio físico. La determinación de cotas ortométricas mediante técnicas tradicionales es una tarea compleja, ya que implica una nivelación geométrica combinada con observaciones gravimétricas. Por otra parte, el uso conjunto de observaciones GPS y ondulaciones geoidales, representan una alternativa potencial a la nivelación clásica. A esto debe agregarse que las medidas derivadas de observaciones con GPS son reconocidas por su alta precisión (dependiendo del instrumental y la metodología utilizada) y los modelos geoidales están determinados cada vez con mayor precisión, con ello el valor de la ondulación.

2.6 Análisis de la relación entre alturas ortométricas y alturas elipsoidales.

Las alturas ortométricas (H) se pueden entender como la distancia medida sobre la vertical del lugar, entre el punto sobre la superficie topográfica y el geoide.

Las alturas elipsoidales (h) representan la separación entre la superficie topográfica y el elipsoide, medida sobre la normal del lugar.

Considerando la no coincidencia entre la normal y la vertical, queda determinada la desviación relativa de la vertical (Φ), como el ángulo determinado entre la normal al elipsoide y la vertical del lugar.

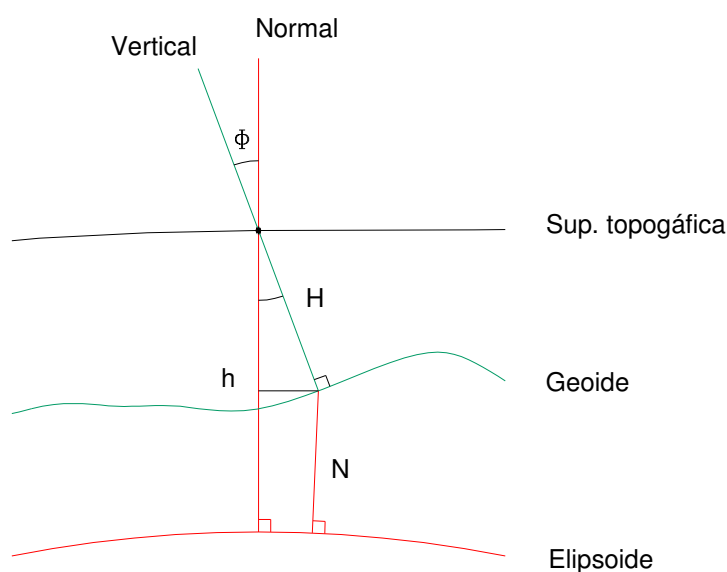


Fig. 13 Altura elipsoidal, ortométrica y desviación relativa de la vertical.

A partir de la Fig. 12, se deduce la siguiente relación entre las magnitudes consideradas:

$$h = N + H \cdot \cos(\Phi) \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que los valores de la desviación relativa de la vertical son de unos pocos segundos, por lo cual el valor del coseno, será muy próximo a 1, se puede realizar la siguiente simplificación.

$$h = N + H \quad (2)$$

Gráficamente, se condice con suponer que la vertical y la normal son coincidentes.

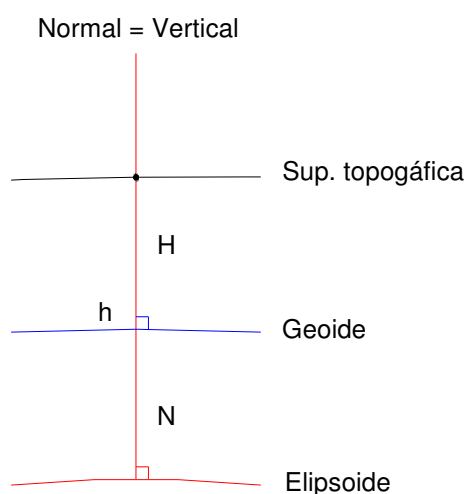


Fig. 14 Esquema simplificado.

2.7 Análisis de la influencia de Φ en la zona de estudio.

A los efectos de estudiar la posibilidad de trabajar con la ecuación simplificada de la relación de alturas ortométricas y elipsoidales, analizaremos el comportamiento en el punto I - Fortaleza.

Por ser dicho punto, el datum horizontal del sistema CDM, se conocen sus coordenadas astronómicas. Asimismo, dicho punto fue ocupado con receptores GPS, por lo que se conocen también sus coordenadas en el sistema WGS 84.

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas astronómicas: } \varphi_A &= -34^\circ 53' 22''.676 \\ \lambda_A &= -56^\circ 15' 31''.030 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas geodésicas (WGS 84)} \quad \varphi_G &= -34^\circ 53' 17''.805 \\ \lambda_G &= -56^\circ 15' 35''.186 \\ h &= 149.759 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ondulación del geoide (EGM 96)} \quad N &= 14.361 \text{ m} \end{aligned}$$

El cálculo de la desviación relativa de la vertical, se hará siguiendo los pasos detallados en Capítulo 18, del libro de Cartografía y Geodesia Matemática de Martín Asín.

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_G = 4''.871$$

$$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_G = 4''.156$$

$$\eta = \Delta\lambda * \cos(\varphi_A) = 3''.409$$

$$\xi = \Delta\varphi = 4''.871$$

$$\varepsilon = \operatorname{atg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = 34^\circ 59' 11''.452$$

$$\Phi = \operatorname{asen}\left(\frac{\operatorname{sen}(\eta)}{\operatorname{sen}(\varepsilon)}\right) = 5''.945$$

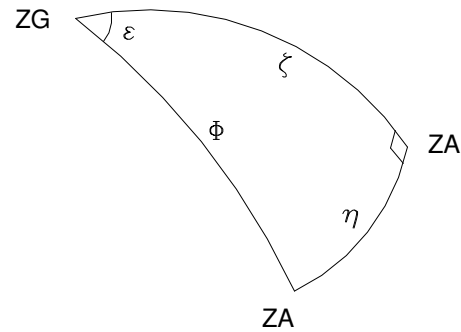


Fig. 15 Triángulo esférico auxiliar.

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación estricta (1), se tiene:

$$149.759 = 14.361 + H * \cos(5''.945)$$

Considerando que:

$$\cos(5''.945) = 0.999999999585 \cong 1$$

Se concluye que es apropiado utilizar la ecuación simplificada, es decir, despreciar el efecto de la desviación relativa de la vertical.

Teniendo en cuenta la extensión de nuestra zona de estudio (aproximadamente comprendida entre $-34^\circ 42' 00'' < \varphi < -34^\circ 56' 00''$ y $-56^\circ 02' 00'' < \lambda < -56^\circ 24' 00''$), y las características de la misma, es de esperar valores similares para la desviación relativa de la vertical.

Esto nos permite trabajar en toda nuestra zona de estudio con la ecuación simplificada.

2.8 Análisis de los datos disponibles.

De acuerdo a lo señalado, contamos con una Red de Puntos Altimétricos, distribuidos en todo el Departamento y de los cuales tenemos la altura referida al Cero Oficial, entre otros valores. Esta información de cada punto, está dada en su correspondiente monografía.

Veamos a modo de ejemplo, la monografía correspondiente a:

1-0312-C Vértice de Nivelación de Primer Orden

SERVICIO GEOGRÁFICO 1ª DIVISIÓN "GEODESIA" 3ª SECCIÓN "NIVELACIÓN"	
NIVELACIÓN GEOMÉTRICA DEL DEPARTAMENTO DE MONTEVIDEO 1958	
ELEMENTOS DE IDENTIFICACIÓN DEL PUNTO FIJO:	
1-0312-C	ALTITUD: <u>34</u> m <u>520,6</u>
(REFERENCIA GRÁFICA <u>G-16</u>)	
A) UBICACIÓN	
GENERAL: <u>Camino Maldonado Km. 12,800 y Avda. 17 mts.-</u> <u>(Punta de Rieles).-</u>	
PARTICULAR: <u>En la pared N.E. del Colegio.- Junto al costado N.</u> <u>de un banco de material, adosado a la mencionada pa</u> <u>red.-</u>	

Fig. 16. Página 1 de la Monografía del vértice 1-0312-C.

B) MONOGRAFÍA

PARAJE:..... Punta de Rieles.-

SECCION POLICIAL:..... 26a.-

SECCION JUDICIAL:..... 11a.-

PROPIETARIO: Colegio de Hermanas (Finca No. 6641 de Cno. Maldonado)

ARRENDATARIO:..... - - - - -

OCUPANTE:..... - - - - -

PERSONA QUE CONOCE EL PUNTO:..... Servicio Geográfico Militar.-

ACCESO (S): Desde Cuchilla Grande y Cno. Maldonado, por éste ha-
cia el N.E. hasta el Kmt. 12,800.-

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Fig. 17. Página 2 de la Monografía del vértice 1-0312-C.

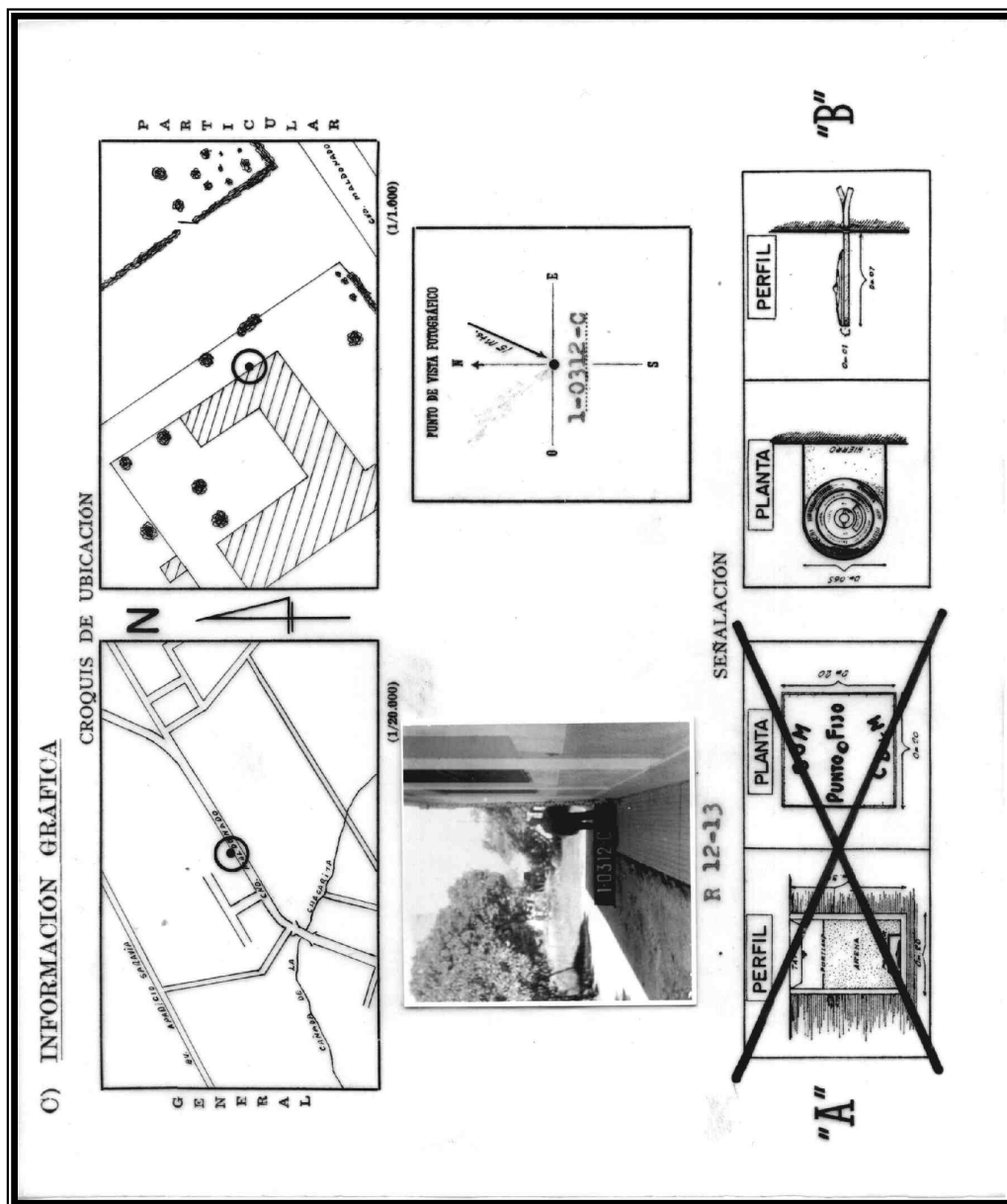


Fig. 18. Página 3 de la Monografía del vértice 1-0312-C.

La información más relevante para nuestro interés, es la Altitud del punto. Dicho valor corresponde a la altura Geométrica nivelada, referida al Datum Vertical.

Del universo de puntos altimétricos disponibles, se seleccionan unos 80 puntos, uniformemente distribuidos en el Departamento. Estos puntos se han ocupado con receptores geodésicos GPS, por lo cual se obtienen sus coordenadas elipsoidales referidas al WGS 84.

En forma paralela, a partir de las coordenadas geodésicas WGS 84 de los puntos, y del modelo geoidal EGM 96 (referido al elipsoide WGS 84), podemos obtener el valor de la ondulación del geode en dichos puntos.

En resumen, para cada punto perteneciente a la Red Altimétrica CDM, y ocupado con los receptores GPS, tendremos:

- Altura geométrica CDM
- Latitud, longitud, altura elipsoidal en WGS 84
- Ondulación geoidal EGM 96

A partir de las coordenadas elipsoidales y de la ondulación del geode, derivamos la altura ortométrica, referida al EGM 96.

$$\boxed{h_{WGS84} = H_{EGM96} + N_{EGM96}} \quad (3)$$

Si bien hemos analizado detenidamente las alturas del sistema CDM, y hemos concluido que las mismas no son estrictamente ortométricas, haremos una simplificación. Consideraremos que en la zona de estudio (Departamento de Montevideo), las superficies equipotenciales de la gravedad tienen un no paralelismo despreciable, además asumiremos que el origen de las alturas (Nivel medio de las aguas del Puerto de Montevideo) se condice con el geode. Estas suposiciones permiten aproximar las alturas del CDM, con alturas ortométricas.

$$\boxed{h_{WGS84} = H_{CDM} + N_{CDM}} \quad (4)$$

Esta última expresión tiene incluida la aproximación de la H_{CDM} como altura ortométrica.

En la ecuación (3), nuestros datos son: h_{WGS84} y N_{EGM96} , con lo cual calculamos H_{EGM96} .

En la ecuación (4), nuestros datos son: h_{WGS84} y H_{CDM} , con lo cual calculamos N_{CDM} .

Igualando (3) y (4), obtenemos:

$$\begin{aligned} H_{EGM96} + N_{EGM96} &= H_{CDM} + N_{CDM} \\ H_{CDM} &= H_{EGM96} + (N_{EGM96} - N_{CDM}) \end{aligned}$$

$$\boxed{H_{CDM} = H_{EGM96} + \Delta N} \quad (5)$$

El valor de $\Delta N = N_{EGM96} - N_{CDM}$, lo conocemos puntualmente en cada vértice seleccionado, asimismo es un valor acotado, producto de las simplificaciones realizadas. A partir de dicha muestra, se realiza un

modelamiento matemático, generando una función que permitirá estimar dicho valor para todo punto de la zona en estudio.

Como resultado: a partir de la altura ortométrica referida al EGM 96, obtendremos la altura de un punto en el sistema CDM.

2.9 Análisis de ΔN.

El conocimiento del valor de ΔN, en los puntos distribuidos homogéneamente en la zona de estudio, permite modelar dicha diferencia, de acuerdo a Vergos G.S. y M. G. Sideris.

A tales efectos se plantean dos funciones paramétricas. La primera de ellas basada en 4 parámetros (b₀, b₁, b₂ y b₃), y la segunda basada en 5 (b₀, b₁, b₂, b₃ y b₄), ambas se detallan para un punto i:

- a) $\Delta N_i = b_3 + b_0 * \cos(\varphi_i) * \cos(\lambda_i) + b_1 * \cos(\varphi_i) * \text{sen}(\lambda_i) + b_2 * \text{sen}(\varphi_i) + v_i$
- b) $\Delta N_i = b_4 + b_0 * \cos(\varphi_i) * \cos(\lambda_i) + b_1 * \cos(\varphi_i) * \text{sen}(\lambda_i) + b_2 * \text{sen}(\varphi_i) + b_3 * \text{sen}^2(\varphi_i) + v_i$

Se deberán hallar los parámetros que minimicen los residuos (v_i).

Analicemos primero la ecuación de 4 parámetros. Si consideramos n puntos, se generarán n ecuaciones, por lo cual queda establecido un sistema de ecuaciones lineales de 4 incógnitas. En el caso de ser n > 4, el sistema se transforma en sobredeterminado, y su solución se halla aplicando el método de los mínimos cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l}
 \Delta N_1 = b_3 + b_0 * \cos(\varphi_1) * \cos(\lambda_1) + b_1 * \cos(\varphi_1) * \text{sen}(\lambda_1) + b_2 * \text{sen}(\varphi_1) \\
 \Delta N_2 = b_3 + b_0 * \cos(\varphi_2) * \cos(\lambda_2) + b_1 * \cos(\varphi_2) * \text{sen}(\lambda_2) + b_2 * \text{sen}(\varphi_2) \\
 \downarrow \\
 \Delta N_i = b_3 + b_0 * \cos(\varphi_i) * \cos(\lambda_i) + b_1 * \cos(\varphi_i) * \text{sen}(\lambda_i) + b_2 * \text{sen}(\varphi_i) \\
 \downarrow \\
 \Delta N_n = b_3 + b_0 * \cos(\varphi_n) * \cos(\lambda_n) + b_1 * \cos(\varphi_n) * \text{sen}(\lambda_n) + b_2 * \text{sen}(\varphi_n)
 \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \downarrow \\ \Delta N_i \\ \downarrow \\ \Delta N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\varphi_1) * \cos(\lambda_1) & \cos(\varphi_1) * \text{sen}(\lambda_1) & \text{sen}(\varphi_1) \\ 1 & \cos(\varphi_2) * \cos(\lambda_2) & \cos(\varphi_2) * \text{sen}(\lambda_2) & \text{sen}(\varphi_2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \cos(\varphi_i) * \cos(\lambda_i) & \cos(\varphi_i) * \text{sen}(\lambda_i) & \text{sen}(\varphi_i) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \cos(\varphi_n) * \cos(\lambda_n) & \cos(\varphi_n) * \text{sen}(\lambda_n) & \text{sen}(\varphi_n) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A * x = b}$$

En forma análoga, se procede para el caso de la segunda expresión.

$$\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \downarrow \\ \Delta N_i \\ \downarrow \\ \Delta N_n \\ \downarrow \\ \Delta N_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\varphi_1) * \cos(\lambda_1) & \cos(\varphi_1) * \text{sen}(\lambda_1) & \text{sen}(\varphi_1) & \text{sen}^2(\varphi_1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \cos(\varphi_2) * \cos(\lambda_2) & \cos(\varphi_2) * \text{sen}(\lambda_2) & \text{sen}(\varphi_2) & \text{sen}^2(\varphi_2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \cos(\varphi_i) * \cos(\lambda_i) & \cos(\varphi_i) * \text{sen}(\lambda_i) & \text{sen}(\varphi_i) & \text{sen}^2(\varphi_i) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \cos(\varphi_n) * \cos(\lambda_n) & \cos(\varphi_n) * \text{sen}(\lambda_n) & \text{sen}(\varphi_n) & \text{sen}^2(\varphi_n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \cos(\varphi_x) * \cos(\lambda_x) & \cos(\varphi_x) * \text{sen}(\lambda_x) & \text{sen}(\varphi_x) & \text{sen}^2(\varphi_x) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A * x = b}$$

Una vez determinados los parámetros, nos permite, a partir de las coordenadas geodésicas de un punto, obtener el valor de ΔN, con lo cual de acuerdo a la ecuación (5), obtenemos la altura referida al sistema CDM.

3. Procesamiento y análisis de los datos.

3.1 Vértices seleccionados.

A los efectos de realizar los estudios presentados anteriormente, se procedió a la selección de una muestra de vértices altimétricos, de la Red CDM. El criterio seguido fue el de obtener una distribución homogénea de los mismos en todo el Departamento. Se priorizaron los vértices de orden superior, debido las dificultades presentadas en ciertas zonas, se debió utilizar Marcas de Azimut, de vértices geodésicos.

Los vértices seleccionados fueron los siguientes:

Nodales	Altimétricos			Geodésicos	
	1º Orden	2º Orden	3º Orden	1º Orden	4º Orden
AGRACIADA	1-0101-A	1-0612-B	2-0402-D	3-0003	FORTALEZA IV-10363
BOISO LANZA	1-0102-C	1-0702-A	2-0403-D	3-0016-A	IV-10380
LA PAZ	1-0104-B	1-0703-D	2-0502-D	3-0019	IV-10424
LA TEJA	1-0202-D	1-0704-B	2-0602-D	3-0030	
PAJAS BLANCAS	1-0203-B	1-0706-B	2-0702-A	3-0031	
PUNTA CARRETA	1-0204-B	1-0802-D	2-0802-B	3-0035	
SANTIAGO VAZQUEZ	1-0301-A	1-0803-D		3-0039	
	1-0302-A	1-0805-A		3-0050	
	1-0304-B	1-0807-B		3-0059	
	1-0307-A	1-0808-B		3-0061	
	1-0308-A	1-0809-A		3-0066	
	1-0311-D	1-0810-B		3-0070	
	1-0312-C	1-0812-A		3-0083	
	1-0402-B	1-0814-A		3-0086	
	1-0403-E	1-0815-A		3-0088	
	1-0405-C	1-0901-B		3-0094-A	
	1-0501-A	1-0903-D		3-0112	
	1-0503-D	1-0905-D		3-0116-A	
	1-0601-A	1-0907-A			
	1-0602-B	1-1003-D			
	1-0604-C	1-1102-C			
	1-0605-A	1-1104-C			
	1-0608-A	1-1106-A			
	1-0611-B	1-1202-C			
		1-1203-A			

Se seleccionaron 9 puntos, los cuales se excluyeron del procesamiento, y se utilizaron posteriormente para evaluar los resultados, dichos puntos, testigos, son los siguientes:

1-0203-B, 1-0612-B, 1-0703-D, 1-0809-A, 1-0907-A, 1-1003-D, 2-0602-D, 2-0802-B, 3-0016-A.

3.2 Presentación de los datos.

PUNTO	LATITUD			LONGITUD			h	N_EGM96	H_EGM96	H_CDM	ΔN
1-0101-A	34	55	13,778	56	10	16,395	19,268	14,075	5,193	4,587	-0,606
1-0102-C	34	54	52,963	56	11	9,448	22,894	14,124	8,770	8,137	-0,633
1-0104-B	34	54	36,587	56	12	43,077	20,676	14,195	6,481	5,934	-0,547
1-0202-D	34	54	35,924	56	8	7,800	24,822	14,023	10,799	10,157	-0,642
1-0203-B	34	54	11,112	56	7	24,613	20,491	14,015	6,476	5,819	-0,657
1-0204-B	34	53	47,973	56	6	46,908	27,250	14,009	13,241	12,572	-0,669
1-0301-A	34	53	55,088	56	4	17,431	18,639	13,916	4,723	4,027	-0,696
1-0302-A	34	53	27,330	56	3	19,564	18,380	13,905	4,475	3,818	-0,657
1-0304-B	34	52	36,935	56	2	38,230	20,914	13,920	6,994	6,367	-0,628
1-0307-A	34	52	12,930	56	4	46,557	37,305	14,010	23,295	22,567	-0,728
1-0308-A	34	52	18,930	56	6	6,715	60,402	14,052	46,350	45,684	-0,666
1-0311-D	34	50	6,076	56	5	14,651	39,581	14,120	25,461	24,739	-0,722
1-0312-C	34	49	34,460	56	6	18,284	49,399	14,180	35,219	34,521	-0,699
1-0402-B	34	53	21,368	56	9	37,101	62,903	14,133	48,770	48,129	-0,641
1-0403-E	34	52	48,273	56	9	3,940	68,361	14,137	54,224	53,540	-0,684
1-0405-C	34	51	19,253	56	7	56,507	73,398	14,161	59,237	58,580	-0,657
1-0501-A	34	52	56,254	56	11	46,355	19,830	14,233	5,597	4,994	-0,604
1-0503-D	34	51	40,427	56	12	47,984	22,809	14,237	8,572	7,874	-0,699
1-0601-A	34	47	9,842	56	6	2,043	53,195	14,277	38,918	38,450	-0,468
1-0602-B	34	46	28,127	56	6	33,080	64,225	14,325	49,900	49,465	-0,435
1-0604-C	34	45	34,179	56	6	52,490	66,244	14,374	51,870	51,333	-0,537
1-0605-A	34	45	50,219	56	8	2,705	75,274	14,403	60,871	60,315	-0,556
1-0608-A	34	44	42,002	56	9	52,284	86,639	14,514	72,125	71,673	-0,452
1-0611-B	34	45	27,173	56	11	43,133	93,935	14,548	79,387	78,990	-0,397
1-0612-B	34	45	59,413	56	12	53,431	71,387	14,568	56,819	56,391	-0,428
1-0702-A	34	50	26,981	56	13	18,729	57,021	14,398	42,623	42,058	-0,565
1-0703-D	34	49	25,446	56	13	11,132	52,293	14,437	37,856	37,380	-0,475
1-0704-B	34	48	29,135	56	13	17,765	62,392	14,480	47,912	47,417	-0,496
1-0706-B	34	46	57,650	56	13	27,618	62,684	14,549	48,135	47,687	-0,448
1-0802-D	34	47	30,159	56	14	35,879	45,006	14,569	30,437	29,967	-0,469
1-0803-D	34	47	13,746	56	15	39,471	64,685	14,618	50,067	49,653	-0,414
1-0805-A	34	45	46,795	56	16	11,919	59,242	14,695	44,547	44,193	-0,354
1-0807-B	34	44	24,572	56	16	57,849	44,190	14,775	29,415	29,135	-0,280
1-0808-B	34	43	24,035	56	17	28,831	32,589	14,831	17,758	17,499	-0,259
1-0809-A	34	43	48,273	56	18	2,238	31,847	14,835	17,012	16,744	-0,268
1-0810-B	34	44	29,491	56	19	4,573	32,464	14,845	17,619	17,365	-0,254
1-0812-A	34	45	55,190	56	17	58,503	48,926	14,753	34,173	33,810	-0,363
1-0814-A	34	47	52,380	56	18	37,552	17,775	14,700	3,075	2,717	-0,358
1-0815-A	34	48	0,279	56	20	8,384	30,325	14,748	15,577	15,191	-0,386
1-0901-B	34	51	10,302	56	14	17,914	27,717	14,405	13,312	12,769	-0,543
1-0903-D	34	50	12,044	56	16	22,965	36,959	14,524	22,435	21,927	-0,508
1-0905-D	34	49	23,780	56	17	58,813	52,182	14,615	37,567	37,170	-0,397
1-0907-A	34	48	42,216	56	19	17,038	27,415	14,691	12,724	12,336	-0,388
1-1003-D	34	52	51,265	56	15	11,590	39,074	14,366	24,708	24,112	-0,596
1-1102-C	34	52	59,245	56	16	48,125	23,884	14,422	9,462	8,920	-0,542
1-1104-C	34	53	40,317	56	18	48,153	27,182	14,469	12,713	12,155	-0,557
1-1106-A	34	52	5,267	56	19	3,337	54,091	14,544	39,547	39,062	-0,484
1-1202-C	34	49	48,846	56	21	18,571	41,672	14,718	26,954	26,542	-0,412
1-1203-A	34	49	14,413	56	22	8,060	37,484	14,770	22,714	22,341	-0,374
2-0402-D	34	50	13,025	56	11	38,607	59,010	14,346	44,664	44,059	-0,606

2-0403-D	34	49	31,619	56	10	54,102	35,103	14,348	20,755	20,172	-0,583
2-0502-D	34	48	41,037	56	11	40,783	37,076	14,413	22,663	22,090	-0,573
2-0602-D	34	46	51,204	56	8	8,936	64,728	14,364	50,364	49,831	-0,533
2-0702-A	34	48	40,744	56	15	6,068	58,484	14,539	43,945	43,399	-0,546
2-0802-B	34	51	28,176	56	17	59,125	48,372	14,530	33,842	33,353	-0,488
3-0003	34	54	31,456	56	9	14,940	43,975	14,067	29,908	29,271	-0,637
3-0016-A	34	52	49,076	56	10	5,505	51,355	14,174	37,181	36,590	-0,591
3-0019	34	51	47,868	56	10	5,748	45,701	14,219	31,482	30,885	-0,597
3-0030	34	48	42,132	56	8	30,087	60,497	14,296	46,201	45,549	-0,652
3-0031	34	47	55,276	56	7	38,055	63,192	14,299	48,893	48,208	-0,685
3-0035	34	47	27,989	56	10	31,588	43,481	14,422	29,059	28,455	-0,604
3-0039	34	46	26,598	56	9	59,246	63,647	14,446	49,201	48,695	-0,506
3-0050	34	48	41,569	56	17	8,300	54,445	14,613	39,832	39,354	-0,478
3-0059	34	49	28,761	56	19	58,863	56,876	14,684	42,192	41,757	-0,435
3-0061	34	50	27,463	56	18	0,671	38,684	14,573	24,111	23,656	-0,455
3-0066	34	50	56,841	56	16	10,580	33,102	14,485	18,617	18,089	-0,528
3-0070	34	52	7,847	56	15	41,897	33,710	14,417	19,293	18,767	-0,526
3-0083	34	51	20,368	56	22	28,941	38,431	14,699	23,732	23,318	-0,414
3-0086	34	49	50,064	56	23	33,415	49,761	14,795	34,966	34,580	-0,386
3-0088	34	49	10,463	56	24	13,007	31,805	14,843	16,962	16,676	-0,286
3-0094-A	34	42	13,733	56	19	11,680	17,062	14,931	2,131	1,921	-0,210
3-0112	34	48	12,990	56	3	42,031	35,705	14,152	21,553	20,877	-0,676
3-0116-A	34	50	52,277	56	3	38,642	23,395	14,032	9,363	8,628	-0,735
AGRACIADA	34	53	57,825	56	11	27,667	18,759	14,176	4,583	3,967	-0,616
BOISO LANZA	34	48	30,884	56	9	41,174	56,451	14,347	42,104	41,455	-0,649
FORTALEZA	34	53	17,805	56	15	35,186	149,759	14,361	135,398	134,820	-0,578
IV-10363	34	51	12,916	56	11	17,765	52,798	14,290	38,508	37,910	-0,598
IV-10380	34	53	44,040	56	7	36,184	43,219	14,042	29,177	28,510	-0,667
IV-10424	34	47	43,315	56	5	10,425	43,251	14,223	29,028	28,360	-0,668
LA PAZ	34	45	53,936	56	13	28,952	60,892	14,594	46,298	45,884	-0,414
LA TEJA	34	52	10,691	56	13	39,681	18,655	14,337	4,318	3,751	-0,567
PAJAS BLANCAS	34	51	8,028	56	20	56,132	37,668	14,652	23,016	22,607	-0,409
PUNTA CARRETA	34	55	59,060	56	9	36,270	17,791	14,016	3,775	3,153	-0,623
SANTIAGO VAZQUEZ	34	47	18,904	56	21	14,633	24,585	14,813	9,772	9,427	-0,344

La tabla anterior presenta para cada vértice:

- Latitud, longitud y altura elipsoidal. Obtenida directamente del procesamiento GPS.
- Ondulación geoidal referida al EGM96 (N_EGM96). Obtenida a partir de las coordenadas geodésicas, aplicando el modelo geoidal.
- Altura ortométrica referida al EGM96 (H_EGM96). Obtenida aplicando la ecuación (3).
- Altura en el sistema CDM (H_CDM). Obtenida a partir de la monografía del vértice.
- Diferencia de Ondulaciones (ΔN). Obtenida aplicando la ecuación (5).

3.3 Determinación de los parámetros de las funciones estimadoras de ΔN .

3.3.1 Función de 4 parámetros.

Matriz A.

1	0,456475	-0,681134	-0,572439
1	0,456332	-0,681300	-0,572356
1	0,456048	-0,681544	-0,572291
1	0,456958	-0,680937	-0,572289
1	0,457299	-0,680868	-0,572098
1	0,457782	-0,680520	-0,572126
1	0,458016	-0,680455	-0,572016
1	0,458230	-0,680479	-0,571816
1	0,457844	-0,680820	-0,571720
1	0,457570	-0,680984	-0,571744
1	0,457947	-0,681174	-0,571215
1	0,457786	-0,681388	-0,571090
1	0,456779	-0,681306	-0,571992
1	0,456939	-0,681309	-0,571861
1	0,457299	-0,681364	-0,571507
1	0,456390	-0,681650	-0,571892
1	0,456304	-0,681961	-0,571591
1	0,458063	-0,681684	-0,570514
1	0,458024	-0,681848	-0,570348
1	0,458043	-0,682015	-0,570133
1	0,457786	-0,682134	-0,570197
1	0,457529	-0,682534	-0,569925
1	0,457093	-0,682676	-0,570105
1	0,456315	-0,682198	-0,571299
1	0,456500	-0,682467	-0,570830
1	0,456608	-0,682700	-0,570465
1	0,456332	-0,682776	-0,570595
1	0,456146	-0,682954	-0,570529
1	0,456173	-0,683226	-0,570183
1	0,456147	-0,683517	-0,569856
1	0,456137	-0,683724	-0,569614
1	0,455719	-0,683785	-0,569875
1	0,455807	-0,683442	-0,570217
1	0,455497	-0,683259	-0,570683
1	0,455184	-0,683441	-0,570715
1	0,456053	-0,682229	-0,571471
1	0,455728	-0,682640	-0,571239
1	0,455485	-0,682963	-0,571047
1	0,455388	-0,682310	-0,571904

1	0,454928	-0,682480	-0,572068
1	0,455024	-0,682733	-0,571690
1	0,454785	-0,683346	-0,571147
1	0,454674	-0,683534	-0,571010
1	0,456668	-0,682009	-0,571243
1	0,456879	-0,682006	-0,571078
1	0,456802	-0,682225	-0,570877
1	0,456123	-0,682680	-0,570876
1	0,456744	-0,681096	-0,572271
1	0,456828	-0,681585	-0,571620
1	0,457431	-0,681800	-0,570881
1	0,457675	-0,681792	-0,570695
1	0,457143	-0,682240	-0,570586
1	0,457345	-0,682309	-0,570342
1	0,455717	-0,682949	-0,570879
1	0,455080	-0,683216	-0,571067
1	0,455381	-0,682820	-0,571300
1	0,455701	-0,682509	-0,571417
1	0,455686	-0,682283	-0,571700
1	0,454412	-0,683290	-0,571511
1	0,454337	-0,683640	-0,571152
1	0,454266	-0,683819	-0,570994
1	0,455903	-0,684113	-0,569334
1	0,458428	-0,681228	-0,570765
1	0,458193	-0,680854	-0,571399
1	0,456357	-0,681467	-0,572137
1	0,457213	-0,681984	-0,570837
1	0,455601	-0,682106	-0,571978
1	0,456644	-0,681825	-0,571481
1	0,457143	-0,680986	-0,572082
1	0,458182	-0,681492	-0,570647
1	0,456701	-0,682849	-0,570212
1	0,456086	-0,682006	-0,571711
1	0,454738	-0,683114	-0,571462
1	0,456538	-0,680941	-0,572619
1	0,455028	-0,683683	-0,570550

Matriz b.

-0,606	-0,537	-0,542	-0,526
-0,633	-0,556	-0,557	-0,414
-0,547	-0,452	-0,484	-0,386
-0,642	-0,397	-0,412	-0,286
-0,669	-0,565	-0,374	-0,210
-0,696	-0,496	-0,606	-0,676
-0,657	-0,448	-0,583	-0,735
-0,628	-0,469	-0,573	-0,616
-0,728	-0,414	-0,546	-0,649
-0,666	-0,354	-0,637	-0,578
-0,722	-0,280	-0,597	-0,598
-0,699	-0,259	-0,652	-0,667
-0,641	-0,254	-0,685	-0,668
-0,684	-0,363	-0,604	-0,414
-0,657	-0,358	-0,506	-0,567
-0,604	-0,386	-0,478	-0,409
-0,699	-0,543	-0,435	-0,623
-0,468	-0,508	-0,455	-0,344
-0,435	-0,397	-0,528	

Resolviendo el sistema lineal expresado en el Capítulo 2.9, el cual se genera a partir de las matrices anteriores, obtenemos los parámetros b_0 , b_1 , b_2 y b_3 .

En este caso se obtienen los siguientes valores:

b_3	24608,376282
b_0	-11265,853593
b_1	16720,708132
b_2	14110,522799

Por lo cual la ecuación queda expresada:

$$\Delta N = 24608.376282 - 11265.853593 * \cos(\varphi) * \cos(\lambda) + 16720.708132 * \cos(\varphi) * \text{sen}(\lambda) + 14110.522799 * \text{sen}(\varphi)$$

3.3.2 Función de 5 parámetros.

Matriz A.

1	0,456475	-0,681134	-0,572439	0,327687
1	0,456332	-0,681300	-0,572356	0,327592
1	0,456048	-0,681544	-0,572291	0,327517
1	0,456958	-0,680937	-0,572289	0,327514
1	0,457299	-0,680868	-0,572098	0,327296
1	0,457782	-0,680520	-0,572126	0,327329
1	0,458016	-0,680455	-0,572016	0,327202
1	0,458230	-0,680479	-0,571816	0,326973
1	0,457844	-0,680820	-0,571720	0,326864
1	0,457570	-0,680984	-0,571744	0,326891
1	0,457947	-0,681174	-0,571215	0,326287
1	0,457786	-0,681388	-0,571090	0,326143
1	0,456779	-0,681306	-0,571992	0,327175
1	0,456939	-0,681309	-0,571861	0,327025
1	0,457299	-0,681364	-0,571507	0,326620
1	0,456390	-0,681650	-0,571892	0,327061
1	0,456304	-0,681961	-0,571591	0,326716
1	0,458063	-0,681684	-0,570514	0,325486
1	0,458024	-0,681848	-0,570348	0,325297
1	0,458043	-0,682015	-0,570133	0,325052
1	0,457786	-0,682134	-0,570197	0,325124
1	0,457529	-0,682534	-0,569925	0,324815
1	0,457093	-0,682676	-0,570105	0,325020
1	0,456315	-0,682198	-0,571299	0,326382
1	0,456500	-0,682467	-0,570830	0,325846
1	0,456608	-0,682700	-0,570465	0,325431
1	0,456332	-0,682776	-0,570595	0,325578
1	0,456146	-0,682954	-0,570529	0,325504
1	0,456173	-0,683226	-0,570183	0,325109
1	0,456147	-0,683517	-0,569856	0,324735
1	0,456137	-0,683724	-0,569614	0,324461
1	0,455719	-0,683785	-0,569875	0,324758
1	0,455807	-0,683442	-0,570217	0,325147
1	0,455497	-0,683259	-0,570683	0,325679
1	0,455184	-0,683441	-0,570715	0,325715
1	0,456053	-0,682229	-0,571471	0,326579
1	0,455728	-0,682640	-0,571239	0,326314
1	0,455485	-0,682963	-0,571047	0,326095
1	0,455388	-0,682310	-0,571904	0,327075
1	0,454928	-0,682480	-0,572068	0,327261
1	0,455024	-0,682733	-0,571690	0,326829
1	0,454785	-0,683346	-0,571147	0,326209
1	0,454674	-0,683534	-0,571010	0,326052
1	0,456668	-0,682009	-0,571243	0,326319
1	0,456879	-0,682006	-0,571078	0,326130
1	0,456802	-0,682225	-0,570877	0,325900
1	0,456123	-0,682680	-0,570876	0,325899
1	0,456744	-0,681096	-0,572271	0,327494
1	0,456828	-0,681585	-0,571620	0,326750
1	0,457431	-0,681800	-0,570881	0,325905
1	0,457675	-0,681792	-0,570695	0,325693
1	0,457143	-0,682240	-0,570586	0,325569
1	0,457345	-0,682309	-0,570342	0,325290
1	0,455717	-0,682949	-0,570879	0,325903
1	0,455080	-0,683216	-0,571067	0,326117
1	0,455381	-0,682820	-0,571300	0,326384
1	0,455701	-0,682509	-0,571417	0,326518
1	0,455686	-0,682283	-0,571700	0,326841
1	0,454412	-0,683290	-0,571511	0,326625
1	0,454337	-0,683640	-0,571152	0,326214
1	0,454266	-0,683819	-0,570994	0,326034
1	0,455903	-0,684113	-0,569334	0,324141
1	0,458428	-0,681228	-0,570765	0,325773
1	0,458193	-0,680854	-0,571399	0,326497
1	0,456357	-0,681467	-0,572137	0,327341
1	0,457213	-0,681984	-0,570837	0,325854
1	0,455601	-0,682106	-0,571978	0,327159
1	0,456644	-0,681825	-0,571481	0,326591
1	0,457143	-0,680986	-0,572082	0,327278
1	0,458182	-0,681492	-0,570647	0,325638
1	0,456701	-0,682849	-0,570212	0,325141
1	0,456086	-0,682006	-0,571711	0,326854
1	0,454738	-0,683114	-0,571462	0,326569
1	0,456538	-0,680941	-0,572619	0,327893
1	0,455028	-0,683683	-0,570550	0,325527

La Matriz b es la misma que el caso anterior.

Por lo tanto:

b_4	28776,602042
b_0	-7169,608857
b_1	10595,138392
b_2	55019,404348
b_3	40305,275952

La ecuación queda expresada:

$$\Delta N = 28776.602042 - 7169.608857 * \cos(\varphi) * \cos(\lambda) + 10595.138392 * \cos(\varphi) * \text{sen}(\lambda) + 55019.404348 * \text{sen}(\varphi) + 40305.275952 * \text{sen}^2(\varphi)$$

3.4 Análisis de resultados.

3.4.1 Función de 4 parámetros.

3.4.1.1 Análisis absoluto.

A partir de los 9 Puntos Testigos, los cuales fueron excluidos en el cálculo de la determinación de los parámetros, analizamos el comportamiento de la función calculada.

En la Tabla adjunta, se aprecia como la función permite modelar el valor de ΔN , y a partir de ello obtener la altura en el sistema CDM. Dicha altura es la denominada H CDM M.

La columna H CDM M – H CDM permite visualizar la aproximación hecha, estando expresados sus valores en centímetros.

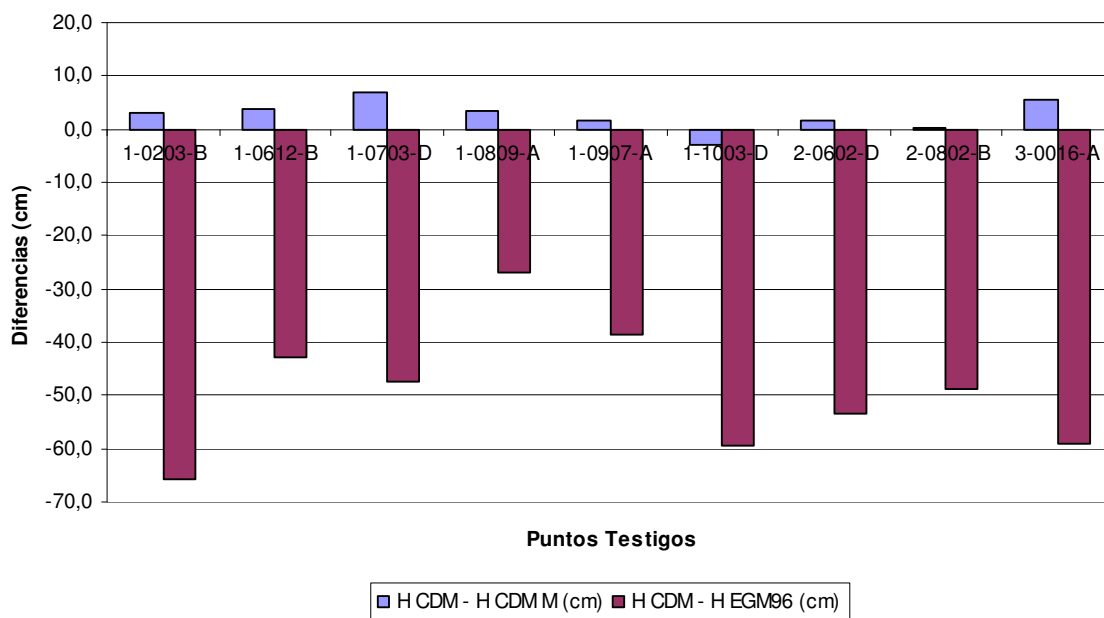
Finalmente la columna H EGM96 – H CDM permite visualizar las diferencias entre las alturas en el sistema CDM y la altura ortométrica referida al EGM96.

PUNTO	H CDM	H CDM M	H CDM - H CDM M (cm)	H EGM96	H CDM - H EGM96 (cm)
1-0203-B	5,819	5,789	3,0	6,476	-65,7
1-0612-B	56,391	56,352	3,9	56,819	-42,8
1-0703-D	37,380	37,311	6,9	37,856	-47,5
1-0809-A	16,744	16,709	3,5	17,012	-26,8
1-0907-A	12,336	12,318	1,8	12,724	-38,8
1-1003-D	24,112	24,140	-2,8	24,708	-59,6
2-0602-D	49,831	49,816	1,6	50,364	-53,3
2-0802-B	33,353	33,353	0,1	33,842	-48,8
3-0016-A	36,590	36,536	5,4	37,181	-59,1

Media	2,6
Desv. Std.	2,9

A los efectos de una mejor visualización de los resultados se presenta el siguiente gráfico.

Comportamiento absoluto



Gráficamente se observa la forma en la cual se aproxima la altura obtenida a partir de la función calculada (H CDM M) al valor de H CDM.

Si el mismo análisis lo hiciéramos para los puntos de la muestra principal, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Media (H CDM - H CDM M)} &= 0.0 \text{ cm} \\ \text{Desv. Std. (H CDM - H CDM M)} &= 4.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Se debe destacar la alta correlación que afecta a este último resultado, por ello se utilizaron los puntos testigos.

3.4.1.2 Análisis relativo.

Si bien el objetivo principal del trabajo es poder determinar alturas en el sistema CDM, a partir de alturas elipsoidales, es igualmente importante el poder calcular diferencias de nivel, para ello analizaremos el comportamiento relativo de las funciones calculadas.

Dicho análisis se hace a partir de los vectores que se forman con los puntos testigos.

Punto	DH CDM	DH MOD	CDM-MOD	Punto
1-0203-B	-50,572	-50,563	-0,009	1-0612-B
1-0203-B	-31,561	-31,522	-0,039	1-0703-D
1-0203-B	-10,925	-10,920	-0,005	1-0809-A
1-0203-B	-6,517	-6,529	0,012	1-0907-A
1-0203-B	-18,293	-18,351	0,058	1-1003-D
1-0203-B	-44,013	-44,027	0,014	2-0602-D
1-0203-B	-27,535	-27,564	0,029	2-0802-B
1-0203-B	-30,771	-30,747	-0,024	3-0016-A
1-0612-B	19,011	19,041	-0,030	1-0703-D
1-0612-B	39,647	39,643	0,004	1-0809-A
1-0612-B	44,055	44,034	0,021	1-0907-A
1-0612-B	32,279	32,212	0,067	1-1003-D
1-0612-B	6,559	6,536	0,023	2-0602-D
1-0612-B	23,037	22,999	0,038	2-0802-B
1-0612-B	19,801	19,816	-0,015	3-0016-A
1-0703-D	20,636	20,602	0,034	1-0809-A
1-0703-D	25,044	24,993	0,051	1-0907-A
1-0703-D	13,268	13,171	0,097	1-1003-D
1-0703-D	-12,451	-12,505	0,053	2-0602-D
1-0703-D	4,027	3,958	0,068	2-0802-B
1-0703-D	0,790	0,775	0,015	3-0016-A
1-0809-A	4,408	4,391	0,017	1-0907-A
1-0809-A	-7,368	-7,431	0,063	1-1003-D
1-0809-A	-33,088	-33,107	0,019	2-0602-D
1-0809-A	-16,610	-16,644	0,034	2-0802-B
1-0809-A	-19,846	-19,827	-0,019	3-0016-A
1-0907-A	-11,776	-11,822	0,046	1-1003-D
1-0907-A	-37,495	-37,498	0,002	2-0602-D
1-0907-A	-21,017	-21,035	0,017	2-0802-B
1-0907-A	-24,254	-24,218	-0,036	3-0016-A
1-1003-D	-25,719	-25,675	-0,044	2-0602-D
1-1003-D	-9,241	-9,212	-0,029	2-0802-B
1-1003-D	-12,478	-12,396	-0,082	3-0016-A
2-0602-D	16,478	16,463	0,015	2-0802-B
2-0602-D	13,241	13,280	-0,038	3-0016-A
2-0802-B	-3,237	-3,183	-0,053	3-0016-A

Media **0,010**

Desv. Std. **0,040**

En la Tabla anterior se calculan los desniveles a partir de:

- Las monografías de los puntos (DH CDM)
- Las alturas calculadas a partir de la función paramétrica.

Punto	DH EGM	CDM-EGM	Dh	CDM-h	Punto
1-0203-B	-50,343	-0,229	-50,896	0,324	1-0612-B
1-0203-B	-31,380	-0,182	-31,802	0,240	1-0703-D
1-0203-B	-10,536	-0,389	-11,356	0,431	1-0809-A
1-0203-B	-6,248	-0,269	-6,924	0,407	1-0907-A
1-0203-B	-18,232	-0,061	-18,583	0,290	1-1003-D
1-0203-B	-43,888	-0,124	-44,237	0,225	2-0602-D
1-0203-B	-27,366	-0,169	-27,881	0,346	2-0802-B
1-0203-B	-30,705	-0,066	-30,864	0,093	3-0016-A
1-0612-B	18,964	0,047	19,095	-0,084	1-0703-D
1-0612-B	39,807	-0,160	39,540	0,107	1-0809-A
1-0612-B	44,095	-0,041	43,972	0,082	1-0907-A
1-0612-B	32,111	0,167	32,313	-0,035	1-1003-D
1-0612-B	6,455	0,104	6,659	-0,100	2-0602-D
1-0612-B	22,977	0,060	23,015	0,022	2-0802-B
1-0612-B	19,638	0,162	20,032	-0,232	3-0016-A
1-0703-D	20,844	-0,207	20,446	0,191	1-0809-A
1-0703-D	25,132	-0,088	24,878	0,166	1-0907-A
1-0703-D	13,148	0,120	13,219	0,049	1-1003-D
1-0703-D	-12,509	0,057	-12,436	-0,016	2-0602-D
1-0703-D	4,014	0,013	3,921	0,106	2-0802-B
1-0703-D	0,675	0,115	0,938	-0,148	3-0016-A
1-0809-A	4,288	0,119	4,432	-0,025	1-0907-A
1-0809-A	-7,696	0,327	-7,227	-0,142	1-1003-D
1-0809-A	-33,352	0,264	-32,881	-0,207	2-0602-D
1-0809-A	-16,830	0,220	-16,525	-0,085	2-0802-B
1-0809-A	-20,169	0,322	-19,508	-0,339	3-0016-A
1-0907-A	-11,984	0,208	-11,659	-0,117	1-1003-D
1-0907-A	-37,640	0,145	-37,313	-0,182	2-0602-D
1-0907-A	-21,118	0,101	-20,957	-0,060	2-0802-B
1-0907-A	-24,457	0,203	-23,940	-0,314	3-0016-A
1-1003-D	-25,656	-0,063	-25,654	-0,065	2-0602-D
1-1003-D	-9,134	-0,107	-9,298	0,057	2-0802-B
1-1003-D	-12,473	-0,005	-12,281	-0,197	3-0016-A
2-0602-D	16,522	-0,044	16,356	0,122	2-0802-B
2-0602-D	13,183	0,058	13,373	-0,132	3-0016-A
2-0802-B	-3,339	0,102	-2,983	-0,254	3-0016-A

Media 0,020 0,015
Desv. Std. 0,171 0,203

En forma similar, se han calculado los desniveles a partir de las alturas ortométricas referidas al EGM96 y a partir de las alturas elipsoidales.

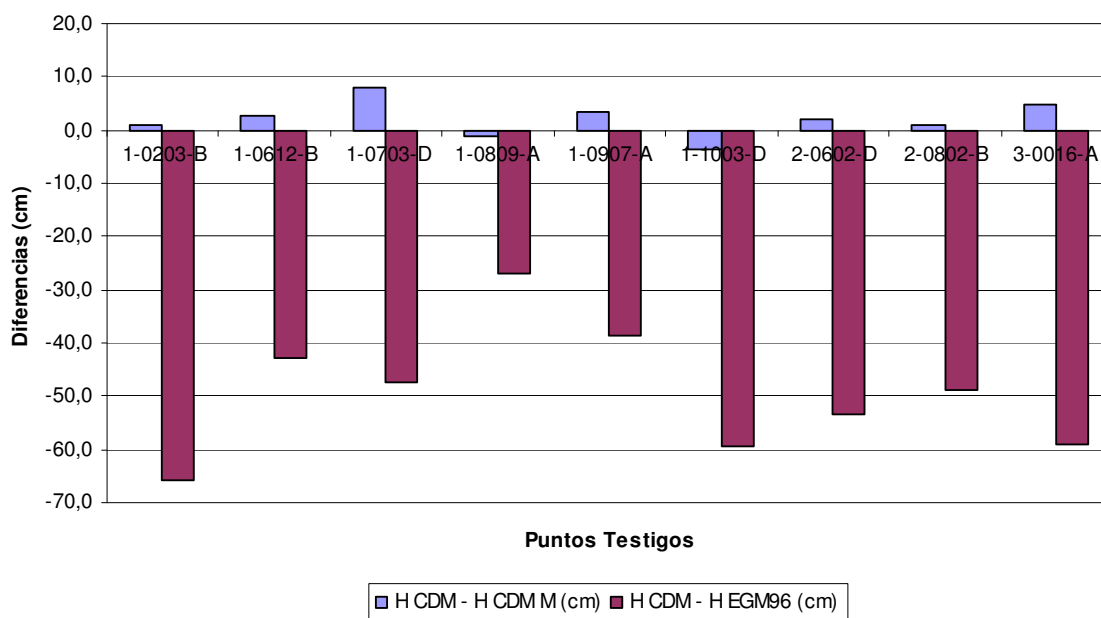
3.4.2 Función de 5 parámetros.

3.4.2.1 Análisis absoluto.

PUNTO	H CDM	H CDM M	H CDM - H CDM M (cm)	H EGM96	H CDM - H EGM96 (cm)
1-0203-B	5,819	5,809	1,0	6,476	-65,7
1-0612-B	56,391	56,365	2,6	56,819	-42,8
1-0703-D	37,380	37,300	8,0	37,856	-47,5
1-0809-A	16,744	16,757	-1,3	17,012	-26,8
1-0907-A	12,336	12,300	3,6	12,724	-38,8
1-1003-D	24,112	24,150	-3,8	24,708	-59,6
2-0602-D	49,831	49,811	2,1	50,364	-53,3
2-0802-B	33,353	33,344	0,9	33,842	-48,8
3-0016-A	36,590	36,542	4,8	37,181	-59,1

Media	2,0
Desv. Std.	3,4

Comportamiento absoluto



Si el mismo análisis lo hiciéramos para los puntos de la muestra principal, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Media (H CDM - H CDM M)} &= 0.0 \text{ cm} \\ \text{Desv. Std. (H CDM - H CDM M)} &= 4.1 \text{ cm} \end{aligned}$$

3.4.2.2 Análisis relativo.

Punto	DH CDM	DH MOD	CDM-MOD	Punto
1-0203-B	-50,572	-50,556	-0,016	1-0612-B
1-0203-B	-31,561	-31,491	-0,070	1-0703-D
1-0203-B	-10,925	-10,948	0,023	1-0809-A
1-0203-B	-6,517	-6,492	-0,025	1-0907-A
1-0203-B	-18,293	-18,341	0,048	1-1003-D
1-0203-B	-44,013	-44,002	-0,011	2-0602-D
1-0203-B	-27,535	-27,535	0,001	2-0802-B
1-0203-B	-30,771	-30,733	-0,038	3-0016-A
1-0612-B	19,011	19,065	-0,054	1-0703-D
1-0612-B	39,647	39,608	0,039	1-0809-A
1-0612-B	44,055	44,065	-0,010	1-0907-A
1-0612-B	32,279	32,215	0,063	1-1003-D
1-0612-B	6,559	6,554	0,005	2-0602-D
1-0612-B	23,037	23,021	0,016	2-0802-B
1-0612-B	19,801	19,823	-0,022	3-0016-A
1-0703-D	20,636	20,543	0,093	1-0809-A
1-0703-D	25,044	24,999	0,045	1-0907-A
1-0703-D	13,268	13,150	0,118	1-1003-D
1-0703-D	-12,451	-12,511	0,059	2-0602-D
1-0703-D	4,027	3,956	0,071	2-0802-B
1-0703-D	0,790	0,758	0,032	3-0016-A
1-0809-A	4,408	4,456	-0,049	1-0907-A
1-0809-A	-7,368	-7,393	0,025	1-1003-D
1-0809-A	-33,088	-33,054	-0,034	2-0602-D
1-0809-A	-16,610	-16,587	-0,022	2-0802-B
1-0809-A	-19,846	-19,785	-0,061	3-0016-A
1-0907-A	-11,776	-11,849	0,073	1-1003-D
1-0907-A	-37,495	-37,510	0,015	2-0602-D
1-0907-A	-21,017	-21,044	0,026	2-0802-B
1-0907-A	-24,254	-24,242	-0,012	3-0016-A
1-1003-D	-25,719	-25,661	-0,058	2-0602-D
1-1003-D	-9,241	-9,194	-0,047	2-0802-B
1-1003-D	-12,478	-12,392	-0,086	3-0016-A
2-0602-D	16,478	16,467	0,011	2-0802-B
2-0602-D	13,241	13,269	-0,027	3-0016-A
2-0802-B	-3,237	-3,198	-0,039	3-0016-A

Media **0,002**
Desv. Std. **0,049**

4. Conclusiones.

A partir de los resultados obtenidos concluimos:

- El estudio realizado permite obtener alturas en el sistema local con un nivel de precisión que lo hace aplicable para diversos fines. A saber, estudios de caminería, cálculos de movimientos de tierra, etc.
- Del análisis absoluto, es decir, la contrastación de la altura dada en el Sistema CDM y la altura derivada a partir de observaciones GPS surge que la precisión alcanzada en la determinación de la altura en el sistema CDM, tanto sea a través de la función de 4 o 5 parámetros, es de un nivel similar.

Función de 4 parámetros:

$$\begin{aligned} \text{Media (H CDM - H CDM M)} &= 2.6 \text{ cm} \\ \text{Desv. Std. (H CDM - H CDM M)} &= 4.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Función de 5 parámetros:

$$\begin{aligned} \text{Media (H CDM - H CDM M)} &= 2.0 \text{ cm} \\ \text{Desv. Std. (H CDM - H CDM M)} &= 3.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

- En el análisis relativo se visualiza claramente el refinamiento logrado en el modelo local, si observamos las Desviaciones Standard obtenidas en los desniveles contrastados, entre los puntos testigos calculados vemos como dichos valores disminuyen:

Función de 4 parámetros:

$$\begin{aligned} \text{Desv. Std. } (\Delta H \text{ CDM} - \Delta H \text{ CDM M}) &= 4.0 \text{ cm} \\ \text{Desv. Std. } (\Delta H \text{ CDM} - \Delta H \text{ EGM96}) &= 17.1 \text{ cm} \\ \text{Desv. Std. } (\Delta H \text{ CDM} - \Delta h \text{ WGS84}) &= 20.3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Función de 5 parámetros:

$$\text{Desv. Std. } (\Delta H \text{ CDM} - \Delta H \text{ CDM M}) = 4.9 \text{ cm}$$

- El análisis de la Media de $(\Delta H \text{ CDM} - \Delta H \text{ CDM M})$, para ambas funciones determina que la función de 5 parámetros brinda una aproximación menos sesgada que la función de 4 parámetros.

Función de 4 parámetros:

$$\text{Media } (\Delta H \text{ CDM} - \Delta H \text{ CDM M}) = 1.0 \text{ cm}$$

Función de 5 parámetros:

$$\text{Media } (\Delta H \text{ CDM} - \Delta H \text{ CDM M}) = 0.2 \text{ cm}$$

5. Recomendaciones.

- a) Aplicar estimadores robustos a los efectos de realizar un procesamiento estadístico y un control en la calidad de los datos, tanto sean observados como derivados.
- b) Contrastar los niveles de los puntos en forma independiente al Sistema CDM, es decir a partir del Nivel Medio del Mar u otras referencias altimétricas globales.

6. Bibliografía.

- a) **One approach to determine the geoid local trend at Montevideo area.**
F. D. Barbato, R. Perez, J. Faure, B. Sozo, D. Sena, M. Aljas.
Pag. 176
Internacional Association of Geodesy Symposia
Volume 124
Vertical Reference Systems
ISSN 0939-9585
ISBN 3-540-43011-3
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- b) **Evaluation of Geoid Models and Validation of Geoid and GPS/Leveling Undulations in Canada.**
Vergos G.S. and M.G. Sideris
Department of Geomatics Engineering, University of Calgary
- c) **El origen del sistema de referencia vertical.**
Claudio Brunini
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata
- d) **Physical Geodesy.**
Weikko A. Heiskanen, Helmut Moritz
Reprint Institute of Physical Geodesy
Technical University. Graz, Austria. 1993
- e) **Sistemas de Referencia en Geodesia.**
Hermann Drewes, Laura Sánchez
Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI)
Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC)
Institut für Planetare Geodäsie, TU Dresden
- f) **Cartografía y Geodesia Matemática.**
Martín Asín